Matrixmultiplikation

Ziel: Kodierung von linearen Gleichungssystemen in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Setze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Definiere eine Multiplikation $\cdot : (K^{m,n}, K^n) \to K^m$, so dass

$$A \cdot x = b$$

Dann hat die i-te Komponente von $A \cdot x$ die Form:

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k.$$

$b_i =$ **„i-te Zeile von A mal x“**

Matrixmultiplikation

Dies verallgemeinern wir auf Matrizen: statt einer Spalte x betrachte p Spalten und fasse diese zu einer Matrix X zusammen:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Wenn wir A mit der j-ten Spalte von X multiplizieren, erhalten wir eine Spalte in K^m:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}.$$

Dieses sei die j-te Spalte der Ergebnismatrix $B \in K^{m,p}$:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

Damit haben wir eine Multiplikation $\cdot : (K^{m,n}, K^{n,p}) \to K^{m,p}$ definiert, so dass

$$A \cdot X = B$$

$b_{ij} =$ **„i-te Zeile von A mal j-te Spalte von X“**