A1 $T \in L(\mathfrak{X})$ normal, E Spektralmaß von T, $A \subseteq \sigma(T)$ Borelmenge

a) Z.z.: $\operatorname{ran}(E(A))$ ist invarianter UR von T. $\int_A z\,dE = E(A)T = TE(A)$

Beweis: $\int_A z\,dE = \int_{\sigma(T)} \chi_A z\,dE = \Psi(\chi_A)\Psi(id) = E(A)T$
$= \Psi(id)\Psi(\chi_A) = TE(A)$. ☐

b) Z.z.: $\sigma(f(T)) \subseteq \overline{f(\sigma(T))}$

Beweis: Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\sigma(T))}$, so ist $(\lambda - f(z))^{-1}$ auf $\sigma(T)$ messbar und beschränkt. Offenbar ist dann $(\lambda - f(T))^{-1} = \int_{\sigma(T)} (\lambda - f(z))^{-1}\,dE$ stetig. ☐

c) Z.z.: Für $g \in C(\overline{f(\sigma(T))})$ gilt $(g \circ f)(T) = g(f(T))$

Beweis: Ist $g(z) = \sum \alpha_{ij} z^i \bar{z}^j$ ein Polynom, so gilt
$(g \circ f)(T) = \sum \alpha_{ij} f(T)^i \overline{f(T)}^j = g(f(T))$.

Wegen $\left\| \int_{\sigma(T)} (g \circ f)\,dE \right\| \leq \|g \circ f\|_\infty \|I\| \leq \|g\|_\infty$ und

$\left\| \int_{\sigma(f(T))} g\,dE_f \right\| \leq \|g\|_\infty \|I\| = \|g\|_\infty$

Sind die Operatoren $g \mapsto (g \circ f)(T)$, $g \mapsto g(f(T))$ beide stetig. Da die Polynome dicht liegen, folgt ihre Gleichheit. ☐

d) Z.z.: $E_f(A) = E(f^{-1}(A))$.

Beweis: Die Behauptung lautet

$E_f(A) = \chi_A(f(T)) = \chi_{f^{-1}(A)}(T) = (\chi_A \circ f)(T) = E(f^{-1}(A))$

oder auch $\langle \chi_A(f(T))x, y \rangle = \langle (\chi_A \circ f)(T)x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathfrak{X}$.
Aus dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt, dass die Funktionale $g \mapsto \langle g(f(T))x, y \rangle = \int g(z)\,d\mu_{x,y}$ und $g \mapsto \langle (g \circ f)(T)x, y \rangle$ auf $B(\overline{f(\sigma(T))}, \mathcal{B})$ bzgl. beschränkter pktw. Konvergenz stetig sind. Die Beh. folgt daher aus c), wenn man charakteristische Funktionen auf diese Weise durch stetige Fktn. approximieren kann. Dies sollte nach dem Lemma von Urysohn möglich sein. ☐

A2

a) $T \in L(\mathfrak{X})$ unitär. Z.Z.: $\exists !\, C \geq 0$ injektiv mit $\sigma(C) \subset [0,2\pi]$ und $T = e^{iC}$

Beweis: T ist normal und besitzt einen Funktionalkalkül. Weiterhin gilt $\sigma(T) \subset S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Definiere daher

$$\arg : \sigma(T) \to [0,2\pi] : e^{i\xi} \mapsto \xi .$$

Dann ist arg messbar und $C = \arg(T)$ definiert. Die Stetigkeit des Funktionalkalküls impliziert

$$T = \Psi(z) = \Psi(e^{i\arg z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(i\Psi(\arg))^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(iC)^k = e^{iC} \quad (*)$$

Nach A1 b) ist $\sigma(C) \leq [0,2\pi]$, insbesondere also C selbstadjungiert (6.3.5) und positiv (Blatt 7, A1). Ist $x \neq 0$ und $Cx = 0$, so ist nach $(*)$ $Ux = x$, d.h. 1 Eigenwert von U und $E(\{1\})x = x$ nach Satz 8.2.10. Daraus folgt

$$0 = Cx = CE(\{1\})x = \Psi(\arg \circ \chi_{\{1\}})x = \Psi(2\pi \cdot \chi_{\{1\}})x = 2\pi E(\{1\})x = 2\pi x \ \lightning .$$

Eindeutigkeit: Seien C_1, C_2 zwei Operatoren mit obigen Eigenschaften. Aus dem spektralen Abbildungssatz des stetigen Funktionalkalküls 7.3.6 folgt $e^{i\sigma(C_1)} = \sigma(e^{iC_1}) = \sigma(T) = \sigma(e^{iC_2}) = e^{i\sigma(C_2)}$ und daher schonmal $\sigma(C_1) \cap (0,2\pi) = \sigma(C_2) \cap (0,2\pi)$. $(*)$

Beh: $0 \in \sigma(C_1) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(C_2)$

Bew.: Ist $0 \in \sigma(C_1)$ so ist 0 nicht isoliert, da kein Eigenwert (Injektivität! Satz 8.2.10). Dann ist $0 \in \sigma(C_2)$ nach $(*)$, da $\sigma(C_2)$ abgeschlossen.

Beh.: $2\pi \in \sigma(C_1) \Leftrightarrow 2\pi \in \sigma(C_2)$

Bew.: Ist $2\pi \in \sigma(C_1)$ und nicht isoliert, so ist $2\pi \in \sigma(C_2)$ nach $(*)$.
Ist 2π isoliert, d.h. Eigenwert so folgt aus A1 sowie 8.2.10, dass $1 \in \sigma(T)$ und $E_T(\{1\}) = E_{C_1}(\{2\pi\})$ (da $E_{C_1}(\{0\}) = 0$ falls $0 \in \sigma(C_1)$). Wäre $2\pi \notin \sigma(C_2)$ so wäre andererseits ebenfalls nach A1 c), $E_T(\{1\}) = 0$. $\lightning$

Folgerung: $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$ und nach A1 c) $E_{C_1} = E_{C_2}$ (da jede Borelmenge $B \in \sigma(C_1)$ als $(e^{i\cdot})^{-1}(A)$ mit $A \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ darstellbar ist) $\Rightarrow C_1 = C_2$ ∎

A2

b) Sei T invertierbar

Polarzerlegung : $T = PU$, P positiv, U unitär (!)

$\Rightarrow P = e^B$ (stetiger Funktionalkalkül : $B = \ln P$)

$U = e^{iC}$ (nach a))

c) Sei $T = e^B e^{iC}$, dann ist

$t \mapsto e^{tB} e^{itC}$, $0 \leq t \leq 1$

ein stetiger Pfad von I zu T durch G.