A1

a) T symmetrisch, $T \subseteq S \subseteq T^*$, $\rho(S) \neq \emptyset$, $\lambda \in \rho(S) \cap \mathbb{C}$

z.z.: $D(T^*) = D(S) \oplus \mathcal{N}(T^* - \lambda)$

Beweis:

Zunächst ist die Summe auf jeden Fall direkt, da

$D(S) \cap \mathcal{N}(T^* - \lambda) = D(S) \cap \mathcal{N}(S - \lambda) = D(S) \cap \{0\} = \{0\}$, da $\lambda \in \rho(S)$.

Die Inklusion "$\supseteq$" ist klar. Sei nun $x \in D(T^*)$, dann ist

$$y = (S-\lambda)^{-1}(T^* - \lambda)x \in D(S)$$

und $x - y \in \mathcal{N}(T^* - \lambda)$, denn

$$(T^* - \lambda)(x-y) = (T^* - \lambda)x + \underbrace{(S-\lambda)}_{\text{da } y \in D(S)}(S-\lambda)^{-1}(T^* - \lambda)x = 0.$$

Folglich $x = y + x - y \in D(S) + \mathcal{N}(T^* - \lambda)$. ☒

b) $R(\bar{T} - \lambda) = X$, $R(\bar{T} - \bar{\lambda}) \neq X$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow T$ besitzt keine selbstadj. Erw.

Beweis: Für jede selbstadjungierte Erweiterung S von T wäre $\bar{T} \subseteq S$.

Es genügt daher zu zeigen, dass $\bar{T}$ keine selbstadj. Erw. besitzt.

Sei $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$, dann ist

(*) $d_+(b^{-1}(\bar{T} - a)) = \dim R(b^{-1}(\bar{T} - \bar{\lambda}))^\perp \neq \dim R(b^{-1}(\bar{T} - \lambda))^\perp = d_-(b^{-1}(\bar{T} - a))$

Somit besitzt $\bar{T} - a$, und damit $\bar{T}$, keine selbstadjungierte Erweiterung.

(Satz 8.3.16). ☒

c) T abg., $\dim R(T - \lambda) = \dim R(T - \bar{\lambda})$ für ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Dann folgt aus (*), dass $T - a = \bar{T} - a$ eine selbstadjungierte Erweiterung besitzt, und damit T. ☒

<u>A2</u>: $X = \{ x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ holomorph auf $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \}$

Skalarprodukt: $\langle \sum c_n z^n , \sum d_n z^n \rangle = \sum c_n \overline{d_n}$

a) <u>z.z.</u>: X ist vollständig

<u>Beweis</u>: Konvergieren die Koeffizienten $(c_n^{(k)}) \xrightarrow{k \to \infty} (c_n)$ in l^2, so gilt für jeden z mit $0 \leq |z| \leq r < 1$, dass

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n^{(k)} - c_n| r^n \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n^{(k)} - c_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}\right)^{1/2}$$

Daher konvergiert die zugehörige Funktionenfolge im Kreis $|z| < r$ gleichmäßig gegen die in diesem Kreis holomorphe Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. $\blacksquare$

b) $(U_1 x)(z) = z x(z)$, $(U_2 x)(z) = z\, x(z^2)$.

Offenbar sind beide Operatoren Isometrien, denn

$$U_1\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^n \quad , \quad U_2\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1},$$

die Koeffizienten ändern sich also nicht wirklich. Aus der Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung folgt auch, dass $I - U_1$ und $I - U_2$ injektiv sind. Also sind U_1, U_2 nach Satz 8.3.12 Cayley-Transformierte selbstadjungierter Operatoren T_1, T_2. Diese sind auch abgeschlossen, da U_1, U_2 abgeschlossen sind (folgt wie in a)).

<u>Defektindizes:</u>

$d_+(T_1) = \dim\left(D(U_1)^\perp\right) = 0$

$d_-(T_1) = \dim\left(R(U_1)^\perp\right) = \dim \operatorname{span}\{1\} = 1$

$d_+(T_2) = \dim\left(D(U_2)^\perp\right) = 0$

$d_-(T_2) = \dim\left(R(U_2)^\perp\right) = \dim\left(\{\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n}\}\right) = \infty$

A3 $X = L^2[0,1]$, $AC^2 = \{x \in X \mid x \text{ absolutstetig}, x' \in X\}$

a) $T_1 x = ix'$, $D(T_1) = \{x \in AC^2 \mid x(0) = x(1) = 0\}$

Z.z.: $\sigma(T_1) \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$, $\sigma_p(T_1) = \emptyset$

Beweis: Es ist $T_1 - \lambda \subset T_1^* - \lambda = T_3 - \lambda$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist daher

$$R(T_1 - \lambda)^\perp = N(T_3 - \lambda) = \operatorname{span}\{t \mapsto e^{-i\lambda t}\}.$$

Folglich $\sigma(T_1) \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$. Jede Eigenfunktion von T_1 müsste eine solche Funktion sein, diese liegen aber nicht in $D(T_1)$ $\square$

b) $T_2 x = ix'$, $D(T_2) = \{x \in AC^2 \mid x(0) = x(1)\}$

Z.z.: $\sigma(T_2) \setminus \{\infty\} = \sigma_p(T_2) = 2\pi k$

Beweis: Das dies Eigenwerte zu den Eigenfunktionen $e^{-i2\pi k t}$ sind, ist klar, auch, dass es keine anderen Eigenwerte geben kann.

Als selbstadjungierter Operator ist T_2 abgeschlossen. Nach Satz 8.3.14 und 8.3.16 ist $R(T_2 - \lambda) = X$. Für alle $\lambda \notin \sigma_p(T_2)$ ist also $T_2 - \lambda$ bijektiv.

Da mit $T_2 - \lambda$ auch $(T_2 - \lambda)^{-1}$ abgeschlossen ist (Blatt 13, A2a), sind beide schon stetig (Satz v. abg. Gr.). Daher $\lambda \in \rho(T_2)$. $\square$

c) $T_3 x = ix'$, $D(T_3) = AC^2$

Z.z.: $\sigma(T_3) \setminus \{\infty\} = \sigma_p(T_3) = \mathbb{C}$

Beweis: Schon in a) gezeigt, dass $N(T_3 - \lambda) = \operatorname{span}\{t \mapsto e^{-i\lambda t}\}$. $\square$

d) $T_4 x = ix'$, $D(T_4) = \{x \in AC^2 \mid x(0) = 0\}$

Z.z.: $\sigma(T_4) \setminus \{\infty\} = \emptyset$

Beweis: Die Lösung der Gleichung $(T_4 - \lambda)x = y, y \in X \Leftrightarrow x' = -i\lambda x - iy$ lautet

$$x(t) = -ie^{-i\lambda t} \int_0^t e^{i\lambda s} y(s)\, ds \qquad \text{(Variation d. Konstanten).}$$

Der Operator $(T_4 - \lambda)^{-1} : L^2[0,1] \to D(T_4)$ ist offenbar stetig:

$$\|(T_4 - \lambda)^{-1} y\|^2 = \int_0^1 \underbrace{|-ie^{-i\lambda t}|^2}_{=1} \underbrace{\left|\int_0^t e^{i\lambda s} y(s)\, ds\right|^2}_{\leq \int_0^1 |y(s)|^2 ds} dt \leq \int_0^1 |y(s)|^2 ds = \|y\|^2.$$

Also alle $\lambda \in \rho(T_4)$. $\square$

<u>A4</u>: $x'' - x = y \in L^2[0,1]$, $x' \in AC^2 \Rightarrow x \in C^1[0,1]$ automatisch (!)

$$T_k x = i x', \quad D(T_1) = \{ x \in AC^2 \mid x(0) = x(1) = 0 \}$$
$$D(T_2) = \{ x \in AC^2 \mid x(0) = x(1) \}$$
$$D(T_3) = AC^2 \to R(T_3) = L^2[0,1]$$

$\Rightarrow T_1^* = T_3, \; T_2^* = T_2, \; T_3^* = T_1$

i) $x'' - x = y$, $y \in L^2[0,1]$, $x(0) = x_1(1) = 0$, $x' \in AC^2$

$$\Leftrightarrow (T_3 T_1 + I)x = -y \Leftrightarrow (T_1^* T_1 + I)x = -y \overset{8.3.7}{\Leftrightarrow} x = -(I + T_1^* T_1)^{-1} y.$$

ii) $x'' - x = y$, $y \in L^2[0,1]$, $x'(0) = x'(1) = 0$, $x' \in AC^2$

$$\Leftrightarrow (T_1 T_3 + I)x = -y \Leftrightarrow (T_3^* T_3 + I)x = -y \overset{8.3.7}{\Leftrightarrow} x = -(I + T_3^* T_3)^{-1} y.$$

iii) $x'' - x = y$, $y \in L^2[0,1]$, $x(0) = x(1)$, $x'(0) = x'(1)$, $x' \in AC^2$

$$\Leftrightarrow (T_2 T_2 + I)x = -y \Leftrightarrow (T_2^* T_2 + I)x = -y \overset{8.3.7}{\Leftrightarrow} x = -(I + T_2^* T_2)^{-1} y.$$

$\boxed{6}$