**Blatt 5, Aufgabe 3(b)**
Sei $A$ eine Banachalgebra mit Eins und $B$ eine abgeschlossene Unteralgebra mit $\mathbf{1} \in B$. Zeigen Sie: für alle $b \in B$ gilt

$$\sigma_B(b) \supseteq \sigma_A(b).$$

Außerdem gehört jeder Randpunkt von $\sigma_B(b)$ zu $\sigma_A(b)$. Wenn also $\sigma_B(b) \subseteq \mathbb{C}$ keinen inneren Punkt enthält, ist $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.

**Lösung:**
Die Beziehung $\sigma_B(b) \supseteq \sigma_A(b)$ ist klar, denn ist $\lambda\mathbf{1} - b \in B$ in $A$ nicht invertierbar, so erst recht nicht in $B$.

Sei nun $\lambda \in \partial\sigma_B(b)$. Dann existiert eine Folge $(\lambda_n) \in \rho_B(b)$ mit $\lambda_n \to \lambda$. Die Inversen $(\lambda_n\mathbf{1} - b)^{-1}$ in $B$ sind natürlich auch Inversen in $A$. Hätte $(\lambda\mathbf{1} - b)$ in $A$ die Inverse $y$, so würde $(\lambda_n\mathbf{1} - b)^{-1} \to y$ in $A$ gelten (da die Resolventenabbildung analytisch ist). Da aber $B$ abgeschlossen ist, wäre $y \in B$ eine Inverse in $B$, was absurd ist.

Besitzt $\sigma_B(b)$ keine inneren Punkte, so folgt $\sigma_B(b) = \partial\sigma_B(b) \subseteq \sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$, also Gleichheit.