Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 11.11.2011

4. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Dies und das)

Aufgabe 1
Seien X ein Banachraum und $T \in L(X)$.

(a) Sei $\lambda \in \sigma_c(T)$. Zeigen Sie: zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und

$$\|\lambda x - Tx\| \leq \epsilon.$$

(b) Zeigen Sie dasselbe für alle $\lambda \in \partial\sigma(T)$.

Aufgabe 2
Seien X ein Hilbertraum und $P, Q \in L(X)$ Orthogonalprojektoren auf abgeschlossene Teilräume M bzw. N. Zeigen Sie, dass die Folge der $(PQ)^n$ punktweise konvergiert und der Grenzwert der orthogonale Projektor auf $M \cap N$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $0 \leq (PQP)^{n+1} \leq (PQP)^n$ für alle n gilt. Folgern Sie hieraus die punktweise Konvergenz von $(PQ)^{n+1} = (PQP)^n Q$.

Aufgabe 3
Seien X ein Hilbertraum und $T \in HS(X)$ mit $r(T) < 1$. Zeigen Sie, dass dann $(I - T)^{-1} = I + R$ mit $R \in HS(X)$ ist.

Aufgabe 4
Seien X ein Hilbertraum und $M \neq 0$ ein bezüglich der Operatornorm abgeschlossener Unterraum von $L(X)$, welcher zusätzlich ein Ideal ist (d.h. es gilt $ST \in M$, falls $S \in M$ oder $T \in M$). Beweisen Sie, dass $K(X) \subseteq M$.

Hinweis: Operatoren endlichen Ranges.