Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 25.11.2011

6. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Gelfandtransformation)

Aufgabe 1
Sei A eine Banachalgebra ohne Einselement und $\Gamma_A \neq \emptyset$. Geben Sie die Beweise der Sätze 7.2.2 und 7.2.7 für diesen Fall:

(a) Γ_A ist (schwach-$*$) lokalkompakt und $\mathcal{G}\colon A \to C_0(\Gamma_A)\colon x \mapsto \widehat{x}$ ein kontraktiver Homomorphismus.

(b) Für alle $x \in A$ ist $\sigma(x) = \widehat{x}(\Gamma_A) \cup \{0\}$.

Machen Sie sich überdies einige Gedanken über lokalkompakte Räume. Zeigen Sie etwa, dass jeder endlichdimensionale normierte Raum lokalkompakt ist, ein unendlichdimensionaler jedoch nie. Beweisen Sie, dass der metrische Raum $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nicht lokalkompakt ist.

Aufgabe 2
Seien A und B kommutative Banachalgebren mit Eins und $f\colon A \to B$ ein Algebrahomomorphismus mit $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Beweisen Sie: Ist B halbeinfach (d.h. die Gelfandtransformation von B injektiv), so muss f stetig sein.

Hinweis: Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Aufgabe 3
Es sei A eine kommutative C^*-Algebra mit Eins. Zeigen Sie, dass alle Elemente in A mit reellem Spektrum hermitesch sind.

Aufgabe 4
Es sei X ein kompakter topologischer Raum. Wir betrachten die Algebra $C(X)$.

1. Zeigen Sie: $I \subseteq C(X)$ ist genau dann ein nichttriviales maximales Ideal, wenn ein $x_0 \in X$ existiert, sodass

$$I = \{f \in C(X) \mid f(x_0) = 0\}.$$

   Folglich besteht zwischen X und der Menge der nichttrivialen maximalen Ideale in $C(X)$ eine eineindeutige Beziehung.

2. Beweisen Sie die Umkehrung von Satz 7.2.6 (5): Ist A eine Algebra mit Eins, dann ist der Kern jedes Algebrahomomorphismus $A \to \mathbb{C}$ ein maximales Ideal in A. Umgekehrt ist der Homomorphismus durch seinen Kern bereits eindeutig bestimmt.

   Folglich besteht zwischen der Menge Γ_A der Charaktere und der Menge der nichttrivialen maximalen Ideale eine eineindeutige Beziehung. Man könnte also Γ_A als Menge der nichttrivialen maximalen Ideale von A auffassen.

3. Folgern Sie, dass jeder Algebrahomomorphismus $C(X) \to \mathbb{C}$ von der Form $f \mapsto f(x_0)$ mit einem festen $x_0 \in X$ ist.

Aufgabe 5
Eine kommutative Banachalgebra A mit Eins genüge der Bedingung $\|x^2\| = \|x\|^2$ für alle $x \in A$. Beweisen Sie, dass die Gelfandtransformation dann isometrisch ist.

Wie in der Vorlesung folgt dann aus dem Satz von Stone-Weierstraß: Ist A zusätzlich *symmetrisch*, d.h. das Bild $\mathcal{G}(A) \subseteq C(\Gamma_A)$ der Gelfandtransformation symmetrisch, so ist $\mathcal{G}$ bereits ein isometrischer Isomorphismus.