Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 09.12.2011

8. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Darstellung involutiver Halbgruppen)

Aufgabe 1

(a) Es sei S eine involutive Halbgruppe und (π, X), $X \neq 0$, eine Darstellung von S. Beweisen Sie: Ist π irreduzibel, so ist π zyklisch. Ist umgekehrt jeder von Null verschiedene Vektor $x_0 \in X$ zyklisch, so ist π irreduzibel.

(b) Sei X ein Hilbertraum. Finden Sie eine möglichst kleine involutive Halbgruppe S mit der Eigenschaft, dass die Menge $\{\pi(S) \mid (\pi, X) \text{ unitäre Darstellung}\}$ genau die Menge aller Isometrien auf X ist.

(c) Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert. Nach Bemerkung 7.4.4(2) ist die Halbgruppe $\{T^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Darstellung der Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$. Entsprechend nennt man $x_0 \in X$ einen zyklischen Vektor von T, wenn $\{T^n x_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ in X total ist.

Beweisen Sie, dass T im Falle, dass X endlichdimensional ist, genau dann einen zyklischen Vektor besitzt, wenn alle Eigenwerte von T einfach sind.

Aufgabe 2

Ist X eine Menge, so ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ eine involutive Halbgruppe vermöge der Operationen $A^* = A$ und $A \cdot B = A \cap B$. Klassifizieren Sie alle Darstellungen von $\mathfrak{P}(X)$ über $\mathbb{C}^n$ bis auf Äquivalenz für

(i) $X = \{0\}$, (ii) $X = \{0, 1\}$.

Aufgabe 3

Beweisen Sie Folgerung 7.4.18: Ist (π, X) eine irreduzible endlichdimensionale Darstellung einer involutiven *kommutativen* Halbgruppe S, so ist X eindimensional.

Illustrieren Sie dies am Beispiel der Darstellung aus Aufgabe 1(c).

Aufgabe 4

Für zwei Darstellungen (π, X), (π', X') einer involutiven Halbgruppe S ist die Menge der Vertauschungsoperatoren definiert durch

$$L_S(X, X') = \{T \in L(X, X') \mid T \circ \pi(s) = \pi'(s) \circ T \text{ für alle } s \in S\}.$$

Zeigen Sie: $L_S(X', X) = L_S(X, X')^* := \{T \in L(X', X) \mid T^* \in L_S(X, X')\}$. Insbesondere ist also $L_S(X)^* = L_S(X)$.

Aufgabe 5

Betrachten Sie den Hilbertraum

$$X = \widehat{\bigoplus_{j \in J}} X_j = \Big\{ x = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j \;\Big|\; \sum_{j \in J} \|x_j\|^2 < \infty \Big\}$$

aus Definition 7.4.8 mit dem Skalarprodukt $\sum_{j \in J} \langle x_j, y_j \rangle$. Die Hilberträume X_j kann man in kanonischer Weise als Teilräume von X auffassen. Offenbar sind sie dann paarweise orthogonal und die Summe

$$\bigoplus_{j \in J} X_j = \Big\{ \sum_{\substack{j \in E \\ E \subseteq J}} x_j \;\Big|\; |E| < \infty,\ x_j \in X_j \text{ für alle } j \in E \Big\} \subseteq X$$

ist direkt. Beweisen Sie, dass sie in X dicht liegt.