Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 20.01.2012

12. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Spektralsatz für normale Operatoren, messbarer Funktionalkalkül)

In allen Aufgaben sei X ein komplexer Hilbertraum.

Aufgabe 1
Seien $T \in L(X)$ normal, E das Spektralmaß von T und $f \in B(\sigma(T), \mathcal{B})$. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subseteq \sigma(T)$ eine Borelmenge, so gilt $\int_A z \, \mathrm{d}E(z) = E(A)T = TE(A)$. Dies zeigt, dass $\mathcal{R}(E(A))$ ein invarianter Unterraum von T ist.

(b) Es gilt $\sigma(f(T)) \subseteq \overline{f(\sigma(T))}$.

(c) Für $g \in C(\overline{f(\sigma(T))})$ gilt $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.

(d) Ist E_f das Spektralmaß von $f(T)$, so gilt $E_f(A) = E(f^{-1}(A))$ für jede Borelmenge $A \subseteq \sigma(f(T))$.
Hinweis: Approximieren Sie χ_A durch stetige Funktionen und benutzen Sie (c).

Aufgabe 2

(a) Sei $T \in L(X)$ unitär. Beweisen Sie, dass ein eindeutig bestimmter injektiver, selbstadjungierter und positiver Operator $C \in L(X)$ existiert mit $\sigma(C) \subset [0, 2\pi]$ und $T = e^{iC}$.

(b) Zeigen Sie, dass jeder invertierbare Operator $T \in L(X)$ eine Darstellung $T = e^B e^{iC}$ mit selbstadjungierten Operatoren $B, C \in L(X)$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass die Gruppe der invertierbaren Operatoren aus $L(X)$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 3

(a) Es sei (e_n) eine Orthonormalbasis von X und (μ_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Sei $M = \overline{\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$. Offenbar ist der durch $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n$ definierte Operator beschränkt und normal. Zeigen Sie, dass sein Spektrum M ist und sein Spektralmaß gegeben ist durch
$$E(A)x = \sum_{\mu_n \in A} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

(b) Bestimmen Sie das Spektralmaß des Operators $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})\colon x \mapsto (\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k+1}))$.
Hinweis: Gehen Sie zum Raum $L^2[-\pi, \pi]$ mit der Orthonormalbasis $e_k(t) = e^{ikt}$ über.

Aufgabe 4
Seien $T \in L(X)$ selbstadjungiert und $h\colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

(a) Zeigen Sie: Der Operator $U := h(T)$ ist unitär und $1 \notin \sigma(U)$ (Cayley-Transformation).

(b) Drücken Sie das Spektralmaß von U durch das von T aus.

(c) Beweisen Sie, dass umgekehrt jeder unitäre Operator U mit $1 \notin \sigma(U)$ die Cayley-Transformation genau eines selbstadjungierten Operators T ist.

Aufgabe 5
Beweisen Sie:

(a) Ist $T \in L(X)$ normal und E das Spektralmaß von T, so ist T genau dann kompakt, wenn für jedes $\epsilon > 0$ die Projektion $E(\{z \in \sigma(T) \mid |z| > \epsilon\})$ endlichdimensionales Bild hat.

(b) Ist X separabel, so ist $K(X)$ das einzige nichttriviale, abgeschlossene, zweiseitige Ideal von $L(X)$.

Aufgabe 6
Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ nicht leer. Zeigen Sie $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}')''$.