Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 03.02.2012

14. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Erweiterung symmetrischer Operatoren, Spektrum)

Aufgabe 1

Es seien X einen komplexen Hilbertraum und $T\colon X \supseteq \mathcal{D}(T) \to X$ ein linearer Operator.

(a) Es seien T symmetrisch und S eine Erweiterung von T derart, dass $T \subseteq S \subseteq T^*$. Weiter sei $\rho(S) \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $\lambda \in \rho(S) \cap \mathbb{C}$ gilt:

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(S) \oplus \mathcal{N}(T^* - \lambda).$$

(b) Sei T symmetrisch. Für ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gelte $\mathcal{R}(\overline{T} - \lambda) = X$,[1] aber $\mathcal{R}(\overline{T} - \overline{\lambda}) \neq X$. Zeigen Sie, dass T keine selbstadjungierte Erweiterung besitzt.

(c) Sei nun T abgeschlossen und symmetrisch. Für ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gelte

$$\dim \mathcal{R}(T - \lambda) = \dim \mathcal{R}(T - \overline{\lambda}).$$

Beweisen Sie, dass T eine selbstadjungierte Erweiterung S mit $T \subseteq S \subseteq T^*$ besitzt.

Aufgabe 2

Es sei X der Raum der in der offenen Einheitskreisscheibe holomorphen Funktionen $x(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ für welche die Reihe $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^\infty |c_n|^2$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass $\|x\|$ eine Norm definiert, unter welcher X ein komplexer Hilbertraum ist.

(b) Betrachten Sie die Operatoren

$$U_1\colon X \to X,\ (U_1x)(z) = zx(z), \quad U_2\colon X \to X,\ (U_2x)(z) = zx(z^2).$$

Zeigen Sie, dass U_1 und U_2 Isometrien sind und Cayley-Transformierte hermitescher abgeschlossener Operatoren T_1, T_2. Bestimmen Sie die Defektindizes von T_1 und T_2.

Aufgabe 3

Seien $X = L^2[0,1]$ und $AC^2[0,1] = \{x \in X \mid x \text{ ist absolutstetig und } x' \in X\}$. Für $k = 1,2,3,4$ sei $T_k x = ix'$ mit $\mathcal{D}(T_1) = \{x \in AC^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, $\mathcal{D}(T_2) = \{x \in AC^2[0,1] \mid x(0) = x(1)\}$, $\mathcal{D}(T_3) = AC^2[0,1]$ und $\mathcal{D}(T_4) = \{x \in AC^2[0,1] \mid x(0) = 0\}$. Zeigen Sie:

(a) $\sigma(T_1) \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$, aber $\sigma_p(T_1) = \emptyset$. (*Hinweis*: Zeigen Sie $\dim \mathcal{R}(T_1 - \lambda I)^\perp = 1$.)

(b) $\sigma(T_2) \setminus \{\infty\} = \sigma_p(T_2) = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(c) $\sigma(T_3) \setminus \{\infty\} = \sigma_p(T_3) = \mathbb{C}$.

(d) $\sigma(T_4) \setminus \{\infty\} = \emptyset$.

Hinweis: In der Übung wurde gezeigt, dass $T_1^* = T_3$, $T_2^* = T_2$ und $T_3^* = T_1$.

Aufgabe 4

Sei $y \in L^2[0,1]$. Betrachten Sie zur Differentialgleichung

$$x'' - x = y$$

die Randwertbedingungen

$$\text{(i)} \quad x(0) = x(1) = 0, \qquad \text{(ii)} \quad x'(0) = x'(1) = 0, \qquad \text{(iii)} \quad x(0) = x(1),\ x'(0) = x'(1).$$

Beweisen Sie, dass jedes Problem eine eindeutige Lösung in $\{x \in C^1[0,1] \mid x' \in AC^2[0,1]\}$ besitzt.

Hinweis: Wenden Sie auf geeignete Operatoren aus Aufgabe 3 Satz 8.3.7 an.

[1] $\overline{T}$ ist die Abschließung von T, siehe letztes Blatt.