Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 15. Oktober 2012

Lineare Algebra II
0. Hausaufgabe

Abgabe: 22.10.2011 **bis** 26.10.2011

---

1. Aufgabe
Sei K ein Körper mit $1+1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $A \in K^{n,n}$ als $A = M + S$ mit einer symmetrischen Matrix $M \in K^{n,n}$ (d.h. $M^T = M$) und einer schiefsymmetrischen Matrix $S \in K^{n,n}$ (d.h. $S^T = -S$) schreiben lässt.

2. Aufgabe
Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -10 & -3 \\ -26 & 39 & 105 & 56 \\ -7 & -1 & 38 & 31 \end{pmatrix}$.

(i) Für welche $t \in \mathbb{R}$ liegt $b = \begin{pmatrix} -7 \\ -21 \\ t \end{pmatrix}$ im Spaltenraum ($SR(A)$) von A?

(ii) Berechnen Sie für dieses t die Lösungsmenge $L(A, b)$.

3. Aufgabe
Sei K ein Körper und sei $A \in K^{n,n}$. Weiter seien λ_1 und λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte von A, also $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2 linear unabhängig sind.

4. Aufgabe
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ und seien $w_1, \dots, w_n$ Vektoren im K-Vektorraum W.

(i) Zeigen Sie, dass ein Homomorphismus $f \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $f(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$, existiert.

(ii) Zeigen Sie, dass dieser eindeutig bestimmt ist.

(iii) Geben Sie explizit $f(v)$ für $v \in V$ an.

5. Aufgabe

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : V \to V, \quad \text{mit } v_j \mapsto \begin{cases} v_j + v_{j+1}, & j = 1, \dots, n-1 \\ v_1 + v_n, & j = n \end{cases}$$

die, wie in Aufgabe 4 gezeigt, eindeutig bestimmt ist.

(i) Berechnen die Matrixdarstellung von f bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$, also $[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}$.

(ii) Gegeben sei nun eine zweite Basis $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n\}$ mit $w_j = jv_{n+1-j}$, $j = 1, \dots, n$. Berechnen Sie die Basisübergangsmatrizen $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ und $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$, sowie die Matrixdarstellungen $[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ und $[f]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}$.

Gesamtpunktzahl: 0