Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 19. Oktober 2012

Lineare Algebra II
1. Hausaufgabe

Abgabe: 29.10.2012 **bis** 02.11.2012

In den folgenden Aufgaben ist K stets ein beliebiger Körper.

1. Aufgabe (5 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum mit der Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Zeigen Sie, dass genau eine Basis $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ des Dualraums V^* mit

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

existiert. (Diese Basis nennen wir die zu $\{v_1, \dots, v_n\}$ *duale Basis.*)

2. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben sei die Basis $B = \{1, t+1, (t+1)(t-1)\}$ des 3-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Berechnen Sie die zu B duale Basis B^*.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und V^* der Dualraum von V.

i) Sei $v \in V$. Zeigen Sie, dass $f(v) = 0$ für alle $f \in V^*$ genau dann gilt, wenn $v = 0$ ist.

ii) Sei $\beta : V \times V^* \to K$ eine Bilinearform mit $\beta(v, f) = f(v)$ für alle $v \in V$ und $f \in V^*$. Zeigen Sie, dass β nicht ausgeartet ist.

4. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben sei eine Menge $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ eines n-dimensional euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$, so dass $\langle u_i, u_j \rangle < 0$ für alle $i \neq j$. Zeigen Sie, dass je n dieser Vektoren eine Basis bilden.

Gesamtpunktzahl: 20