Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 25. Oktober 2012

Lineare Algebra II
2. Hausaufgabe

Abgabe: 05.10.2012 **bis** 09.11.2012

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $f_1, \dots, f_m \in V^*$ und $U := \bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathrm{Kern}(f_i)$. Zeigen Sie, dass $\dim(U) \geq n - m$ ist.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum. Für einen Unterraum U von V sei

$$U^0 := \{f \in V^* \,|\, f(u) = 0 \quad \forall\, u \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass U^0 ein Untervektorraum von V^* ist, sowie dass für Teilräume U_1, U_2 von V gilt:

(i) $(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$.

(ii) $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_2^0 \subseteq U_1^0$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Seien V, W zwei K-Vektorräume, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V, $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W und $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ bzw. $\{w_1^*, \dots, w_m^*\}$ die dualen Basen zu $\mathcal{B}_V$ bzw. $\mathcal{B}_W$. Für $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, setze

$$\varphi_{ij} : V \times W \to K, \quad \varphi_{ij}(v, w) := v_i^*(v) w_j^*(w), \quad v \in V, w \in W. \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{\varphi_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ eine Basis von

$$\mathcal{L}(V, W; K) := \{\beta : V \times W \to K \,|\, \beta \text{ bilinear}\}$$

ist. (Verwenden Sie **nicht** $\dim(\mathcal{L}(V, W; K)) = nm$).

(ii) Folgern Sie $\dim(\mathcal{L}(V, W; K)) = nm$ aus (i).

(iii) Seien $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ bzw. $\{w_1^*, \dots, w_m^*\}$ beliebige Basen von V^* bzw. W^*. Definiere φ_{ij} wie in (1). Gilt die Aussage aus (i) immer noch? Beweis oder Gegenbeispiel.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine hermitesche Matrix. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$s : \mathbb{C}^{n,1} \to \mathbb{C}^{n,1}, \quad (v, w) \mapsto w^H A v$$

eine hermitesche Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^{n,1}$ ist.

Gesamtpunktzahl: 20