Lineare Algebra II
3. Hausaufgabe

Abgabe: 12.11.2012 **bis** 16.11.2012

---

1. Aufgabe (3 Punkte)
Betrachten Sie den nm dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^{n,m}$ mit der Abbildung

$$s : \mathbb{C}^{n,m} \times \mathbb{C}^{n,m} \to \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(B^H A).$$

Zeigen Sie, dass s ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{n,m}$ ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum. Seien s_1 und s_2 Skalarprodukte auf V mit folgender Eigenschaft: Sind $v, w \in V$ mit $s_1(v, w) = 0$, so folgt $s_2(v, w) = 0$.
Zeigen oder widerlegen Sie: Es existiert $\lambda > 0$ mit $s_1 = \lambda s_2$.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie:

(i) Für $v \in V$ ist die Abbildung

$$f_v : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle x, v \rangle,$$

ein Homomorphismus, also $f_v \in V^*$.

(ii) Die folgende Abbildung ist ein Isomorphismus:

$$\Phi : V \to V^*, \quad v \mapsto f_v.$$

(Dieser heißt *Fréchet-Riesz-Isomorphismus.*)

4. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sei $f \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $\langle f(v), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $f = 0$ gilt.

(ii) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $f \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $\langle f(v), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $f = 0$ gilt.

5. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Sei $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ mit $d_1, \ldots, d_n > 0$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle v, w\rangle := w^T D v$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n,1}$ gegeben ist.

(ii) Untersuchen Sie, welche Eigenschaften eines Skalarprodukts verletzt sind, wenn eines oder mehrere der d_i gleich Null sind oder wenn alle d_i von Null verschieden sind, jedoch nicht alle das gleiche Vorzeichen haben.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^{n,1}$ und $\|\cdot\|'$ eine Norm auf $\mathbb{K}^{m,1}$. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_* := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|'} = \sup\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|'} \;\middle|\; x \in \mathbb{K}^{m,1}, x \neq 0 \right\}$$

eine Norm auf $\mathbb{K}^{n,m}$ definiert, und dass $\|A\|_* = \sup_{\|x\|'=1} \|Ax\|$ gilt.

Gesamtpunktzahl: 20