Lineare Algebra II
4. Hausaufgabe

Abgabe: 19.11.2012 **bis** 23.11.2012

---

1. Aufgabe (5 Punkte)
Orthonormalisieren Sie die folgende Basis des Vektorraums $\mathbb{C}^{2,2}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(B^H A)$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(i) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ die dem Skalarprodukt zugeordnete Norm. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ die *Parallelogrammgleichung* erfüllt, d.h. dass

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

für alle $x, y \in V$ gilt.

(ii) Sei $n \geq 2$. Untersuchen Sie, für welche $p \geq 1$ die p-Norm auf $\mathbb{K}^{n,1}$ von einem Skalarprodukt induziert wird und für welche p dies nicht der Fall ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Weiter sei $U \subseteq V$ ein Unterraum.

(i) Zeigen Sie, dass $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ gilt.

(ii) Sei $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $U = (U^\perp)^\perp$ gilt.

(iii) Sei V euklidisch mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\Phi : V \to V^*$, $v \mapsto \langle\cdot, v\rangle$, der Fréchet-Riesz-Isomorphismus (siehe HA 3-3). Zeigen Sie $\Phi(U^\perp) = U^0$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $u \in \mathbb{R}^{n,1} \setminus \{0\}$ und sei

$$H(u) = I_n - 2\frac{1}{u^T u} u u^T \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Zeigen Sie, dass die n Spalten von $H(u)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n,1}$ bezüglich des Standardskalarproduktes bilden.

Gesamtpunktzahl: 20