**Technische Universität Berlin** WiSe 2012 / 2013
**Institut für Mathematik** `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 17. November 2012

# Lineare Algebra II
# 5. Hausaufgabe

Abgabe: 26.11.2012 **bis** 30.11.2012

---

**1. Aufgabe** (6 Punkte)
Sei $\langle v, w\rangle = w^T Bv$ mit

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\langle v, w\rangle = w^T Bv$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2,1}$ ist.

(ii) Berechnen Sie die zu $f : \mathbb{R}^{2,1} \to \mathbb{R}^{2,1}, v \mapsto w = Fv$ mit $F \in \mathbb{R}^{2,2}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ adjungierte Abbildung $f^{\mathrm{ad}}$.

(iii) Untersuchen Sie, welche Eigenschaften für $F$ gelten müssen, damit $f$ selbstadjungiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

**2. Aufgabe** (5 Punkte)
Seien $V$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\langle f(v), v\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$ gilt.

**3. Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $V$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\Phi$ der Fréchet-Riesz-Isomorphismus aus HA 03-3. Zeigen Sie, dass $f^{\mathrm{ad}} = \Phi^{-1} \circ f^* \circ \Phi$ für $f \in \mathcal{L}(V, V)$ gilt.

*Bemerkung:* Die gleiche Aussage gilt ebenfalls für unitäre Vektorräume, allerdings ist $\Phi : V \to V^*$, $v \mapsto \langle \cdot, v\rangle$, dann *semilinear* und bijektiv.

**4. Aufgabe** (5 Punkte)
Sie $V$ ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei $f \in \mathcal{L}(V, V)$ eine Projektion, d.h. es gilt $f^2 = f$. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\mathrm{Kern}(f) \perp \mathrm{Bild}(f)$ gilt (d.h. für alle $v \in \mathrm{Kern}(f)$ und $w \in \mathrm{Bild}(f)$ gilt $\langle v, w\rangle = 0$ ).

**Zusatzaufgabe** (5 Punkte)

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume und sei $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Zeigen Sie, dass ein eindeutiges $g \in \mathcal{L}(W, V)$ mit

$$\langle f(v), w\rangle_W = \langle v, g(w)\rangle_V \qquad \forall\, v \in V, w \in W$$

existiert. Wir schreiben dann $f^{\mathrm{ad}} := g$ und nennen diese *die zu* $f$ *adjungierte Abbildung*, oder kurz *die Adjungierte von* $f$.

Gesamtpunktzahl: 20