Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 23. November 2012

Lineare Algebra II
6. Hausaufgabe

Abgabe: 03.12.2012 **bis** 07.12.2012

---

1. Aufgabe (4 Punkte)
Ist V ein Vektorraum und $f \in \mathcal{L}(V,V)$, so heißt f *nilpotent*, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k-\text{mal}} = 0_{\mathcal{L}(V,V)}.$$

Sei nun V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f \in \mathcal{L}(V,V)$ selbstadjungiert und nilpotent. Zeigen Sie, dass $f = 0$ ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $f \in \mathcal{L}(V,V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie, dass $\text{Bild}(f - \lambda \text{Id}_V)$ ein f- invarianter Unterraum ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $f : \mathbb{K}^{4,1} \to \mathbb{K}^{4,1}, v \mapsto Fv$ mit der Matrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie P_f und bestimmen Sie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Eigenwerte von f mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie die Eigenvektoren bzw. Eigenräume.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Seien V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $f = -f^{\text{ad}}$. Zeigen Sie, dass $f \neq 0$ genau dann gilt, wenn f nicht diagonalisierbar ist.
(f is diagonalisierbar, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass $[f]_{B,B}$ eine Diagonalmatrix ist.)

5. Aufgabe (4 Punkte)

Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathcal{L}(V,V)$ und

$$p(t) := \prod_{j=1}^{m} (t - \mu_j) = (t - \mu_1)(t - \mu_2) \cdot \ldots \cdot (t - \mu_m) \in K[t]_{\leq m}.$$

Zeigen Sie, dass $p(f)$ genau dann bijektiv ist, wenn $\lambda \notin \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ für alle Eigenwerte λ von f gilt.

Gesamtpunktzahl: 20