Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 30. November 2012

Lineare Algebra II
7. Hausaufgabe

Abgabe: 10.12.2012 **bis** 14.12.2012

---

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$ und

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[t]_{\leq n} &\to \mathbb{R}[t]_{\leq n}, \\ p(t) &\mapsto p(t+1) - p(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f linear ist. Für welche n ist f diagonalisierbar, für welche n nicht?

2. Aufgabe (4 Punkte)
Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Untersuchen Sie, welche der folgenden Endomorphismem $f \in \mathcal{L}(V, V)$ diagonalisierbar sind und welche nicht:

(i) $f(v_j) = v_j + v_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$, und $f(v_n) = v_n$,

(ii) $f(v_j) = jv_j + v_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$, und $f(v_n) = nv_n$.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ und sei R die Schur-Form von A. D.h. $A = QRQ^H$ wobei $Q^HQ = I_n$ und R eine obere Dreieckmatrix ist. Zeigen Sie, dass $AA^H = A^HA$ genau dann gilt, wenn R eine Diagonalmatrix ist.

4. Aufgabe (3 Punkte)
Seien $p_1, p_2, p_3 \in K[t]$. Zeigen Sie die folgenden Teilbarkeitsaussagen:

(i) Aus $p_1|p_2$ und $p_2|p_3$ folgt $p_1|p_3$.

(ii) Aus $p_1|p_2$ und $p_1|p_3$ folgt $p_1|(p_2 + p_3)$.

(iii) Gilt $p_1|p_2$ und $p_2|p_1$, so existiert $c \in K\backslash\{0\}$ mit $p_1 = cp_2$.

5. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Seien V ein unitärer Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Weiter sei $\mathcal{H}_n := \{g \in \mathcal{L}(V, V) \,|\, g = g^{\mathrm{ad}}\}$. Dann sind die Abbildungen

$$h_1 : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n, \quad g \mapsto \frac{1}{2}(f \circ g + g \circ f^{\mathrm{ad}}),$$
$$h_2 : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n, \quad g \mapsto \frac{1}{2i}(f \circ g - g \circ f^{\mathrm{ad}}),$$

wohldefiniert und erfüllen $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.

(ii) Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ gegeben und $\mathcal{S}_n := \{M \in \mathbb{C}^{n,n} \,|\, M^T = M\}$ der Vektorraum der komplex-symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Dann sind

$$h_1 : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n, \quad B \mapsto AB + BA^T, \quad h_2 : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n, \quad B \mapsto ABA^T,$$

wohldefiniert und erfüllen $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Seien $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $\lambda_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von der Matrix $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$ mit $a_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$, sowie deren geometrische und algebraische Vielfachheit. Ist A diagonalisierbar?

Gesamtpunktzahl: 20