

Lineare Algebra II

8. Hausaufgabe

Abgabe: 17.12.2012 bis 21.12.2012

1. Aufgabe

(2 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibilität:

(i) $p_1 = t^3 - t^2 + t - 1 \in \mathbb{R}[t]$

(ii) $p_2 = 4t^3 - 4t^2 - t + 1 \in \mathbb{C}[t]$

2. Aufgabe

(6 Punkte)

(i) Seien V ein unitärer Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f, g \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie, dass eine ONB \mathcal{B} von V existiert, so dass $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ und $[g]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ beide obere Dreiecksmatrizen sind, d.h. f und g sind simultan triangulierbar.(ii) Zeigen Sie, dass die Bedingung $f \circ g = g \circ f$ in (i) hinreichend aber nicht notwendig ist.

3. Aufgabe

(6 Punkte)

(i) Seien V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten und $g \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie, dass f und g simultan diagonalisierbar sind.(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = [a_{ij}] \in K^{n,n}$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen a_{ii} , $i = 1, \dots, n$. Bestimmen Sie alle $B \in K^{n,n}$ mit $AB = BA$.(iii) Seien $n \in \mathbb{N}$ und

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r I_{n_r} \end{bmatrix} \in K^{n,n}.$$

Dabei seien $\lambda_j \in K$, $j = 1, 2, \dots, r$, paarweise verschieden und $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, r$, mit $\sum_{j=1}^r n_j = n$. Bestimmen Sie alle $B \in K^{n,n}$ mit $AB = BA$.

4. Aufgabe

(6 Punkte)

Seien V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$ eine Projektion, d.h. es gilt $f^2 = f$. Zeigen Sie:

- (i) Sei $k := \dim(\text{Bild}(f))$. Zeigen Sie, dass eine Basis \mathcal{B} von V existiert, so dass

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_k & \\ & 0_{n-k} \end{bmatrix}$$

gilt. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom P_f von f und zeigen Sie, dass $\lambda \in \{0, 1\}$ für jeden Eigenwert λ von f gilt.

- (ii) Die Abbildung $g := \text{id}_V - f$ ist eine Projektion mit $\text{Kern}(g) = \text{Bild}(f)$ und $\text{Bild}(g) = \text{Kern}(f)$.
- (iii) Für jeweils zwei Unterräume $U, W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$ gibt es eine eindeutige Projektion $\tilde{f} \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $\text{Bild}(\tilde{f}) = U$ und $\text{Kern}(\tilde{f}) = W$.

Gesamtpunktzahl: 20