Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 17. Dezember 2012

Lineare Algebra II
9. Hausaufgabe

Abgabe: 07.01.2013 **bis** 11.01.2013

---

1. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Polynom $t^n - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ für $n \geq 2$ keinen Teiler $P \in \mathbb{Q}[t]$ mit $1 \leq \deg(P) \leq n-1$ besitzt.

2. Aufgabe (8 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$.

(i) Zeigen Sie für $j \in \mathbb{N}_0$, dass $\text{Kern}(f^j) \subseteq \text{Kern}(f^{j+1})$ gilt und dass ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $\text{Kern}(f^m) = \text{Kern}(f^{m+1})$. Zeigen Sie weiter, dass dann $\text{Kern}(f^m) = \text{Kern}(f^{m+j})$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie für $j \in \mathbb{N}_0$, dass $\text{Bild}(f^j) \supseteq \text{Bild}(f^{j+1})$ gilt und dass ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $\text{Bild}(f^\ell) = \text{Bild}(f^{\ell+1})$. Zeigen Sie weiter, dass dann $\text{Bild}(f^\ell) = \text{Bild}(f^{\ell+j})$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) Seien nun $m, \ell \in \mathbb{N}_0$ minimal mit $\text{Kern}(f^m) = \text{Kern}(f^{m+1})$ und $\text{Bild}(f^\ell) = \text{Bild}(f^{\ell+1})$. Zeigen Sie, dass $m = \ell$ gilt.

(iv) Sei $m \in \mathbb{N}_0$ wie in (iii). Zeigen Sie, dass $\text{Kern}(f^m)$ und $\text{Bild}(f^m)$ beide f-invariant sind und dass $V = \text{Kern}(f^m) \oplus \text{Bild}(f^m)$ gilt.

3. Aufgabe (3 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es existiert eine Basis B von V so, dass $[f]_{B,B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(ii) Es existiert eine endliche Folge $V_0, V_1, \ldots, V_n$ von Unterräumen von V mit

- $V_j \subsetneq V_{j+1}$ für $j = 0, 1, \ldots, n-1$,
- $\dim_K(V_j) = j$ für $j = 0, 1, \ldots, n$,
- V_j ist f-invariant für $j = 0, 1, \ldots, n$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gelte $V = U_1 \oplus U_2$ mit f-invarianten Unterräumen U_1, U_2 von V. Definiere $f_j := f|_{U_j} \in \mathcal{L}(U_j, U_j)$, $j = 1, 2$. Für $v \in V$ existieren eindeutige $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$, so dass $f(v) = f(u_1) + f(u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$ folgt. Wir schreiben hierfür $f = f_1 \oplus f_2$ und sagen, f ist die *direkte Summe von f_1 und f_2 (bzgl. der Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$)*. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(f_1) + \mathrm{Rang}(f_2)$.

(ii) $P_f = P_{f_1} \cdot P_{f_2}$.

(iii) Für alle $\lambda \in K$ gilt $a(\lambda, f) = a(\lambda, f_1) + a(\lambda, f_2)$.
(Dabei definieren wir $a(\lambda, h) := 0$, wenn λ kein Eigenwert von $h \in \mathcal{L}(V,V)$ ist.)

(iv) Für alle $\lambda \in K$ gilt $g(\lambda, f) = g(\lambda, f_1) + g(\lambda, f_2)$.
(Dabei ist $g(\lambda, h) := \dim(\mathrm{Kern}(\lambda\,\mathrm{id} - h))$ für $h \in \mathcal{L}(V,V)$.)

(v) Für alle $p \in K[t]$ gilt $p(f) = p(f_1) \oplus p(f_2)$.

Zusatzaufgabe (5 Punkte)

(**Weihnachtsaufgabe**) Sei $A \in GL_n(\mathbb{C}), n \geq 2$, und sei $\mathrm{adj}(A) \in \mathbb{C}^{n,n}$ die Adjunkte von A. Zeigen Sie, dass es $n-1$ Matrizen $A_j \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $\det(-A_j) = \det(A), j = 1, \cdots, n-1$ und

$$\mathrm{adj}(A) = \prod_{i=1}^{n-1} A_j$$

gilt.

Gesamtpunktzahl: 20