

Lineare Algebra II

10. Hausaufgabe

Abgabe: 14.01.2013 bis 18.01.2013

1. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine nilpotente Matrix vom Grad $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, mit Hilfe des Krylov Raumes, dass $p \leq n$ ist.

2. Aufgabe

(5 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5,5}.$$

Bestimmen Sie dabei die Zahlen $d_s(\lambda) = \text{Rang}((A - \lambda I)^{s-1}) - \text{Rang}((A - \lambda I)^s)$ aus der Vorlesung zur Bestimmung der Größen der Jordanblöcke.

Hinweis: Es gilt $P_A = (t - 1)^4(t - 2)$. Dies müssen Sie nicht zeigen. Zur Probe: Es gilt

$$(A - I)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Aufgabe

(2 Punkte)

Bestimmen Sie (bis auf die Reihenfolge der Blöcke) alle Matrizen J in Jordan-Normalform mit charakteristischem Polynom $P_J = (t + 1)^4(t - 3)^4$ und Minimalpolynom $m_J = (t + 1)^2(t - 3)^2$. Begründen Sie ihr Ergebnis.

4. Aufgabe

(4 Punkte)

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n,n}$. Das charakteristische Polynom P_A von A zerfalle in Linearfaktoren. Das Minimalpolynom von A werde mit m_A bezeichnet. Zeigen Sie:

- (i) Ist $n = 2$ oder $n = 3$, so ist die Jordan-Normalform J_A von A eindeutig durch P_A und m_A bestimmt.

Hinweis: Fallunterscheidung zur Anzahl paarweiser verschiedener Eigenwerte von A .

- (ii) Für $n \geq 4$ ist die Jordan-Normalform J_A von A nicht eindeutig durch P_A und m_A bestimmt.

5. Aufgabe

(4 Punkte)

Seien V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Das charakteristische Polynom P_f von f zerfalle in Linearfaktoren.

- (i) Zeigen Sie: f ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom m_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

- (ii) Sei $f \neq \text{id}_V$ mit $f^3 = \text{id}_V$. Überprüfen Sie, ob f diagonalisierbar ist, wenn

a) $K = \mathbb{R}$,

b) $K = \mathbb{C}$.

Gesamtpunktzahl: 20