Lineare Algebra II
11. Hausaufgabe

Abgabe: 21.01.2013 **bis** 25.01.2013

---

1. Aufgabe (8 Punkte)
Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4}.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalformen J_A von A und J_B von B, sowie $X, Y \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ mit $J_A = X^{-1}AX$ und $J_B = Y^{-1}BY$.

Hinweis: Es gibt keine Punkte für „Folgefehler“: Denken Sie an eine Probe (schreiben Sie diese aber nicht mit auf).

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $A \in K^{n,n}$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass eine diagonalisierbare Matrix D und eine nilpotente Matrix N existieren mit $A = D + N$ und $DN = ND$.

3. Aufgabe (2 Punkte)
Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$, dessen charakteristisches Polynom P_f in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie: Es gilt $P_f = m_f$ genau dann, wenn $g(\lambda, f) = 1$ für alle Eigenwerte λ von f ist.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $A \in K^{n,n}$ eine Matrix, die eine Jordan-Normalform hat. Wir definieren

$$I_n^R := \left[\delta_{i,n+1-j}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 1 & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in K^{n,n}, \quad J_n^R(\lambda) := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \iddots & \iddots & \vdots \\ \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in K^{n,n}.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

(i) $I_n^R J_n(\lambda) I_n^R = J_n(\lambda)^T$.

(ii) A und A^T sind ähnlich.

(iii) $J_n(\lambda) = I_n^R J_n^R(\lambda)$.

(iv) A kann als Produkt zweier symmetrischer Matrizen geschrieben werden.

Gesamtpunktzahl: 20