

## Lineare Algebra II

### 14. Hausaufgabe

Abgabe: 11.02.2013 bis 15.02.2013

---

#### 1. Aufgabe

(3 Punkte)

Sei  $V$  ein reeller oder komplexer Vektorraum mit  $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$  und sei  $f \in \mathcal{L}(V, V)$  diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass es ein Skalarprodukt auf  $V$  gibt, so dass  $f$  normal bzgl. dieses Skalarproduktes ist.

#### 2. Aufgabe

(6 Punkte)

- (i) Zeigen Sie den folgenden Satz: Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  ist normal, d.h. es gilt  $A^T A = A A^T$ , genau dann, wenn es eine orthogonale Matrix  $U \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $A = U D U^T$  gibt, wobei  $D = \text{diag}(R_1, \dots, R_m)$  und für  $j = 1, \dots, m$  gilt entweder  $R_j \in \mathbb{R}^{1,1}$  oder

$$R_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}. \text{ Hinweis:}$$

\* Zeigen Sie, dass  $R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$  normal ist.

\* Zeigen Sie, dass für eine reelle Matrix  $B$  mit  $B^T B = 0$  bereits  $B = 0$  folgt.

- (ii) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  normal. Zeigen Sie: Sind die Eigenwerte von  $A^T A$  paarweise verschieden, so ist  $A$  symmetrisch.

#### 3. Aufgabe

(3 Punkte)

Zeigen Sie: Ist  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  normal und  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $ad - bc \neq 0$  auf dem Spektrum von  $A$  definiert, so gilt  $f(A) = (aA + bI)(cA + dI)^{-1}$ .

#### 4. Aufgabe

(8 Punkte)

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (i)  $A$  ist genau dann normal, wenn  $\|Ax\|_2 = \|A^Hx\|_2$  für jedes  $x \in \mathbb{C}^{n,1}$  gilt.
- (ii)  $A$  ist genau dann normal, wenn es eine normale Matrix  $B$  mit paarweise verschiedenen Eigenwerten gibt, die mit  $A$  kommutiert.
- (iii) Sei  $a \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $A$  genau dann normal, wenn  $A + aI$  normal ist.
- (iv) Definiere den hermiteschen Teil  $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^H)$  von  $A$  und den schieferhermiteschen Teil  $S(A) = \frac{1}{2}(A - A^H)$  von  $A$ .  
Zeigen Sie, dass  $A = H(A) + S(A)$ ,  $H(A)^H = H(A)$  und  $S(A)^H = -S(A)$  gelten.  
Zeigen Sie weiter, dass  $A$  genau dann normal ist, wenn  $H(A)$  und  $S(A)$  kommutieren.

Gesamtpunktzahl: 20