Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 8. Februar 2013

Lineare Algebra II
15. Hausaufgabe

Abgabe: keine

---

1. Aufgabe (0 Punkte)

Definiere für $u \in \mathbb{R}^{n,1}$ die *Householder-Matrix* $H(u) := I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$ falls $u \neq 0$ und $H(0) := I_n$. Zeigen Sie:

(i) Für $u \neq 0$ sind $H(u)$ und $\begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}$ orthogonal ähnlich, d.h. es existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $Q^T H(u) Q = \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}$.
Hieraus folgt, dass $H(u)$ nur die Eigenwerte 1 und -1 mit $a(H(u), 1) = n - 1$ und $a(H(u), -1) = 1$ hat.

(ii) Jede orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ kann als Produkt von n Householder-Matrizen geschrieben werden, d.h. es existieren $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^{n,1}$ mit $S = \prod_{i=1}^{n} H(u_i)$.

2. Aufgabe (0 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist *positiv definit*, d.h. $x^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ mit $x \neq 0$.

(ii) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(iii) Der Trägheitsindex von A ist $(n, 0, 0)$.

3. Aufgabe (0 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Eine Lösung $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ der nicht-linearen Matrix-Gleichung $X^2 = A$ wird Quadratwurzel von A genannt. Zeigen Sie:

(i) Eine symmetrisch positiv definite Matrix besitzt eine symmetrisch positiv definite Quadratwurzel.

(ii) Die Matrix $J_n(0)$, $n \geq 2$, besitzt keine Quadratwurzel.

Gesamtpunktzahl: 0