**Technische Universität Berlin** WiSe 2012 / 2013
**Institut für Mathematik** `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 25. Oktober 2012

# Lineare Algebra II
# 2. Tutoriumsvorschläge

---

## Tutoriumsvorschläge

**1. Aufgabe**
Seien $V, W$ zwei $K$-Vektorräume. Sei

$$\mathscr{L}(V,W;K) := \{\beta : V \times W \to K \mid \beta \text{ bilinear}\}.$$

Versehe $\mathscr{L}(V,W;K)$ mit den beiden Verknüpfungen

$$+ : \mathscr{L}(V,W;K) \times \mathscr{L}(V,W;K) \to \mathscr{L}(V,W;K), \quad (\alpha,\beta) \mapsto \alpha + \beta,$$
$$\cdot : K \times \mathscr{L}(V,W;K) \to \mathscr{L}(V,W;K), \quad (\lambda,\beta) \mapsto \lambda\beta,$$

wobei für alle $v \in V, w \in W$ gilt

$$(\alpha+\beta)(v,w) = \alpha(v,w) + \beta(v,w) \quad \text{und} \quad (\lambda\beta)(v,w) = \lambda\beta(v,w).$$

Zeige: $(\mathscr{L}(V,W;K), +, \cdot)$ ist ein $K$-Vektorraum.

**2. Aufgabe**
Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen $\beta_j : \mathbb{C}^{3,1} \times \mathbb{C}^{3,1} \to \mathbb{C}$ jeweils eine Bilinearform, symmetrische Bilinearform, Sesquilinearform, hermitesche Form ist.

(i) $\beta_1(x,y) = 3x_1\bar{x}_1 + 3y_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_2,$

(ii) $\beta_2(x,y) = x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_3 + x_3\bar{y}_1,$

(iii) $\beta_3(x,y) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1,$

(iv) $\beta_4(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_1 + 2ix_2\bar{y}_3 - 2ix_3\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3.$

Geben Sie für Bilinear- und Sesquilinearformen die Matrixdarstellung bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ und der Basis $\mathcal{B}_2 = \{e_1, e_1 + ie_2, e_2 + ie_3\}$ an.

**3. Aufgabe**
Sei $K$ ein Körper. Zeigen Sie, dass $\sim$ mit

$$A \sim B :\Leftrightarrow \text{es existiert } Z \in \mathrm{GL}_n(K) \text{ mit } B = Z^TAZ$$

eine Äquivalenzrelation auf $K^{n,n}$ ist. (Matrizen $A, B$ mit $A \sim B$ heißen *kongruent.*)