Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 2. November 2012

Lineare Algebra II
3. Tutoriumsvorschläge

---

1. Aufgabe
Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^{n,1}$ mit einem beliebigen Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{n,1} \times \mathbb{R}^{n,1} \to \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ existiert, so dass

$$\langle v, w \rangle = w^T A v \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^{n,1}.$$

2. Aufgabe
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f : W \to V$ eine injektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle w, \tilde{w} \rangle_f := \langle f(w), f(\tilde{w}) \rangle$$

ein Skalarprodukt auf W erklärt ist.
Gilt dies immer noch, wenn f nicht injektiv ist?

3. Aufgabe
Betrachten Sie den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^{n,m}$ mit der *Frobeniusnorm*

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie, dass $\| \, \|_F$ eine Norm auf $\mathbb{C}^{n,m}$ ist.

4. Aufgabe
Sei V ein euklidischer Vektorraum endlicher Dimension, sei $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und sei $f : V \to V$ ein Isomorphismus. Weiter seien A_1 bzw. A_2 die Matrixdarstellungen von β bzgl. der Basen $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bzw. $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und F_1 bzw. F_2 die Matrixdarstellungen von f bzgl. der Basen $\mathcal{B}_1$ bzw. $\mathcal{B}_2$. Zeigen Sie: Falls $A_1 = F_1$ und $A_2 = F_2$, dann ist die Basisübergangsmatrix $P = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ orthogonal, d.h. $P^T = P^{-1}$.