Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 9. November 2012

Lineare Algebra II
4. Tutoriumsvorschläge

---

1. Aufgabe
Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie: Sind $v_1, \ldots, v_n$ alle von Null verschieden und paarweise orthogonal, also $\langle v_j, v_k \rangle = 0$ falls $j \neq k$, so sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

2. Aufgabe

(i) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seien $b_1, \ldots, b_k \in V$ und $U := \operatorname{Span}\{b_1, \ldots, b_k\}$. Zeigen Sie für $v \in V$:

$$v \in U^\perp \Leftrightarrow \langle v, b_j \rangle = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, k.$$

(ii) Sei nun $V = \mathbb{C}^{4,1}$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle x, y \rangle = y^H x$. Seien

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 & i & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad b_2 = \begin{bmatrix} i & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Bestimmen Sie $U^\perp$ (und geben Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ an).

3. Aufgabe
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Gibt es auf V ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so dass $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist?

4. Aufgabe
Sei $V = C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, dt.$$

Zeigen Sie, dass $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nt), \sin(nt)$, $n = 1, 2, \ldots$ ein (abzählbar unendliches) Orthonormalsystem bilden.