Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 17. November 2012

Lineare Algebra II
5. Tutoriumsvorschläge

---

1. Aufgabe
Sei $\beta(v,w) = w^T B v$ mit $B = \mathrm{diag}(1,-1)$ für $v,w \in \mathbb{R}^{2,1}$ definiert. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{2,1} \to \mathbb{R}^{2,1}, v \mapsto w = Fv$ mit $F \in \mathbb{R}^{2,2}$ und die lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^{2,1} \to \mathbb{R}^{2,1}, w \mapsto v = Hw$ mit $H \in \mathbb{R}^{2,2}$, wobei

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $\beta_v, \beta^{(1)}$ und $\beta^{(2)}$ sowie die Rechtsadjungierte von f und die Linksadjungierte von h bezüglich β.

2. Aufgabe
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Weiter seien $f, g \in \mathcal{L}(V,V)$. Zeigen Sie: Falls $g^{ad} \circ f = 0 \in \mathcal{L}(V,V)$, dann folgt $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $x \in \mathrm{Bild}(f)$ und $y \in \mathrm{Bild}(g)$. Hierfür schreiben wir $\mathrm{Bild}(f) \perp \mathrm{Bild}(g)$.

3. Aufgabe
Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f \in \mathcal{L}(V,V)$. Weiter sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, d.h. $f(U) \subseteq U$, so ist $U^\perp$ ein f^{ad}-invarianter Unterraum.

4. Aufgabe
Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f \in \mathcal{L}(V,V)$. Zeigen Sie, dass

(i) $\mathrm{Kern}(f^{\mathrm{ad}} \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$,

(ii) $\mathrm{Bild}(f^{\mathrm{ad}} \circ f) = \mathrm{Bild}(f^{\mathrm{ad}})$.

5. Aufgabe
Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f, g \in \mathcal{L}(V,V)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass $f \circ g$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $f \circ g = g \circ f$.

6. Aufgabe
Zeigen Sie:

(i) Ist V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, dann gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}\{f \in \mathcal{L}(V,V) \mid f = f^{\mathrm{ad}}\} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(ii) Ist V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum, dann gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}\{f \in \mathcal{L}(V,V) \mid f = f^{\mathrm{ad}}\} = n^2.$$