Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 23. November 2012

Lineare Algebra II
6. Tutoriumsvorschläge

---

1. Aufgabe
Seien V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f \in \mathscr{L}(V,V)$ mit $f^2 = -\operatorname{id}_V$. Bestimmen Sie alle möglichen Eigenwerte von f.

2. Aufgabe
Sei $f \in \mathscr{L}(\mathbb{Z}_3^{3,1}, \mathbb{Z}_3^{3,1})$ durch $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ gegeben und sei $\mathcal{B}$ die kanonische Basis von $\mathbb{Z}_3^{3,1}$. Bestimmen Sie $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ und zeigen Sie, dass f keine Eigenwerte besitzt.

3. Aufgabe
Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}.$$

Untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist und geben Sie gegebenenfalls eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{Q}^{3,1}$ an, so dass $[A]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonal ist.

4. Aufgabe
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Außerdem existiert ein $v \in \mathbb{R}^{4,1} \setminus \{0\}$, so dass $Av = 4v$.

(i) Bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 4.

(ii) Zeigen Sie **ohne** Berechnung der Determinante von A, dass A den Eigenwert 0 hat und berechnen Sie dessen geometrische Vielfachheit.

(iii) Bestimmen Sie **ohne** Berechnung des charakteristischen Polynoms von A die algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von A.