Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 6. Dezember 2012

Lineare Algebra II
8. Tutoriumsvorschläge

---

1. Aufgabe
Seien K ein Körper und $p(t) \in K[t]$.

(i) Zeigen Sie:
  a) Ist $\text{Grad}(p(t)) = 1$, so ist $p(t)$ irreduzibel.
  b) Ist $\text{Grad}(p(t)) \geq 2$ und hat $p(t)$ eine Nullstelle, so ist $p(t)$ nicht irreduzibel. (D.h. für $\text{Grad}(p(t)) \geq 2$ gilt: p irreduzibel $\Rightarrow$ $p(t)$ hat keine Nullstelle.)
  c) Sei $\text{Grad}(p(t)) = 2$, dann gilt: $p(t)$ irreduzibel $\Leftrightarrow$ $p(t)$ hat keine Nullstelle.
  d) Sei $\text{Grad}(p(t)) = 3$, dann gilt: $p(t)$ irreduzibel $\Leftrightarrow$ $p(t)$ hat keine Nullstelle.

(ii) Geben Sie einen Körper K und ein Polynom $q(t) \in K[t]_{\leq 4}$ an, so dass $q(t)$ nicht irreduzibel ist und keine Nullstelle besitzt.

2. Aufgabe
Gegeben seien die Polynome $p = t^4 - 1$ und $q = t^2 + t + 1$ über einem Körper K. Zerlegen Sie p und q in irreduzible Polynome über den Körpern

(i) $K = \mathbb{C}$,

(ii) $K = \mathbb{R}$ und

(iii) $K = \mathbb{Z}_2$.

3. Aufgabe
Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von

$$p_1 = (t-1)^3(t-2)^2(t-3),$$
$$p_2 = (t-4)(t-3)^2(t-2)(t-1)^2,$$
$$p_3 = (t-2)(t-4)^3(t-1).$$

4. Aufgabe
Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

kommutieren und bestimmen Sie eine unitäre Matrix Q, so dass $Q^H AQ$ und $Q^H BQ$ in oberer Dreiecksform sind.

5. Aufgabe
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathscr{L}(V, V)$ und P_f das charakteristische Polynom von f. Zeigen Sie, dass $P_f(f) = 0_{\mathscr{L}(V,V)}$ gilt.