Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 17. Dezember 2012

Lineare Algebra II
9. Tutoriumsvorschläge

---

1. Aufgabe
Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V,V)$. Weiter sei U ein f-invarianter Unterraum von V mit $\dim(U) = m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass eine Basis B von V existiert, so dass

$$[f]_{B,B} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

mit $A_1 \in K^{m,m}$ ist.

2. Aufgabe
Seien V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{L}(V,V)$, U ein f-invarianter Unterraum von V mit $\dim(U) = m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass U mindestens einen Eigenvektor von f enthält.

3. Aufgabe
Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V,V)$ bijektiv. Zeigen Sie, dass f und f^{-1} die gleichen invarianten Unterräume besitzen.

(Gilt diese Aussage auch für $\dim(V) = \infty$?)

4. Aufgabe
Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V,V)$. Sei $v_0 \in V \backslash \{0\}$ und m der Grad von v_0 bzgl. f.

(i) Sei $\mathcal{P}_0 := \{p \in K[t] \,|\, p \text{ monisch}, p(f)(v_0) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_0 \neq \varnothing$ und dass ein eindeutig bestimmtes Polynom $P_{v_0} \in \mathcal{P}_0$ mit minimalem Grad existiert. Dieses erfüllt $\text{Grad}(P_{v_0}) = m$.

Der Krylov-Raum $K_m(f, v_0)$ ist f-invariant, also ist $f|_{K_m(f,v_0)} \in \mathcal{L}(K_m(f,v_0), K_m(f,v_0))$. Setze $B := \{v_0, f(v_0), \ldots, f^{m-1}(v_0)\}$.

(ii) Bestimmen Sie $[f|_{K_m(f,v_0)}]_{B,B}$ und $P_{f|_{K_m(f,v_0)}}$.

(iii) Zeigen Sie $P_{f|_{K_m(f,v_0)}} | P_f$.