Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 11. Januar 2013

Lineare Algebra II
11. Tutoriumsvorschläge

---

1. Aufgabe
Bestimmen Sie die Jordan-Normalform und das Minimalpolynom der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{C}_{\leq 3}[t] \to \mathbb{C}_{\leq 3}[t], \quad \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 \mapsto \alpha_1 t + \alpha_2 t + \alpha_3 t^3.$$

2. Aufgabe
Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 3 & \\ & & & & & & & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8,8}.$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A, das Minimalpolynom von A, sowie alle Eigenwerte mit zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

3. Aufgabe
Berechnen Sie die Jordan-Normalform der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5,5}$$

und bestimmen Sie eine invertierbare Matrix X, so dass $X^{-1}AX$ in Jordan-Normalform ist. Bestimmen Sie auch das Minimalpolynom von A.

4. Aufgabe

Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V,V)$ ein Endomorphismus, der eine Jordan-Normalform besitzt. Es seien $\widetilde{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, k$, die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f. Für $j = 1, \ldots, k$ bezeichne $\widetilde{d}_j$ die Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert $\widetilde{\lambda}_j$.

Zeigen Sie, dass $M_f := \prod_{j=1}^{k} (t - \widetilde{\lambda}_j)^{\widetilde{d}_j}$ das monische Polynom kleinsten Grades mit $M_f(f) = 0$ ist, also dass $M_f = m_f$ gilt.