Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 21. Januar 2013

Lineare Algebra II
12. Tutoriumsvorschläge

---

1. Aufgabe
Berechnen Sie die Jordan-Normalform der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5,5}$$

und bestimmen Sie eine invertierbare Matrix X, so dass $X^{-1}AX$ in Jordan-Normalform ist. Bestimmen Sie auch das Minimalpolynom von A.

2. Aufgabe
Lösen Sie das folgende System linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x) + 3y_2(x) - 7y_3(x), & y_1(0) &= 1, \\ y_2'(x) &= -y_2(x) + y_3(x), & y_2(0) &= 1, \\ y_3'(x) &= -y_2(x) - 3y_3(x), & y_3(0) &= 1. \end{aligned}$$

3. Aufgabe
Betrachten Sie die lineare skalare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + a_1 z^{(1)} + a_0 z = g, \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}, z^{(j)} = \frac{d^j z}{dt^j}, j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

(eventuell mit Anfangsbedingungen $z(t_0) = z_0, z^{(1)}(t_0) = z_1, \ldots, z^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$), sowie das lineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$y' = Ay + f, \tag{2}$$

(eventuell mit Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$), wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,1}$$

ist. Zeigen Sie:

(i) z ist eine Lösung der DGL (1) genau dann, wenn $y = \begin{bmatrix} z & z^{(1)} & \dots & z^{(n-1)} \end{bmatrix}^T$ eine Lösung des Systems erster Ordnung (2) ist. Gleiches gilt für die Anfangswertprobleme.

(ii) Es gilt

$$P_A = \det(tI - A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0.$$

4. Aufgabe
Bestimmen Sie die eindeutige Lösung der linearen skalaren Differentialgleichung 3. Ordnung

$$z^{(3)} + 3z'' + 3z' + z = 0$$

mit den Anfangswerten $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$ und $z''(0) = -1$.