Technische Universität Berlin WiSe 2012 / 2013
Institut für Mathematik `http://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS12/LinAlg2/`
Prof. Dr. V. Mehrmann, Dr. S. Jokar Stand: 8. Februar 2013

Lineare Algebra II
15. Tutoriumsvorschläge

---

1. Aufgabe
Zeigen Sie: Die Mengen der orthogonalen bzw. unitären Matrizen,

$$\mathcal{O}(n) := \{Q \in \mathbb{R}^{n,n} : Q^T Q = I_n\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{U}(n) := \{U \in \mathbb{C}^{n,n} : U^H U = I_n\},$$

sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Aufgabe
Sei $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ orthogonal.

(i) Zeigen Sie, dass $\alpha \in [0, 2\pi[$ existiert, so dass entweder

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

gilt.

(ii) Betrachten Sie $A \in \mathbb{R}^{2,2} \subseteq \mathbb{C}^{2,2}$ als komplexe Matrix und bestimmen Sie die Eigenwerte in $\mathbb{C}$. Wann sind diese reell?

3. Aufgabe
Zeigen Sie:

(i) Sei $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ mit $\|x\|_2 = 1$, dann gibt es eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $Tx = e_1$.

(ii) Seien $x, y \in \mathbb{R}^{n,1}$ mit $\|x\|_2 = \|y\|_2 \neq 0$, dann gibt es eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $Px = y$.

4. Aufgabe
Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Seien $A = A^H \in \mathbb{K}^{n,n}$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^{n,1}$. Zeigen oder widerlegen Sie: A ist genau dann positiv definit, wenn $v_j^H A v_j > 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

5. Aufgabe

(i) Welche der folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

sind positiv definit? Welche sind positiv semidefinit? (Teste mit der Definition!)

(ii) Bestimmen Sie jeweils den Trägheitsindex.