

### Tutorium 3

T ①

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symm. ( $A = A^T$ ) und pos. definit ( $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ), dann existiert die sogenannte CHOLESKY ZERLEGUNG

$$A = G \cdot G^T = \begin{bmatrix} \Delta \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \\ \vdots \end{bmatrix}$$

↑ untere  $\Delta$ -Matrix mit positiven Diagonalelementen  
 $\Rightarrow$  EINDEUTIGKEIT

### Berechnung der Cholesky Zerlegung

$$G \cdot G^T = A \Rightarrow \begin{bmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{21} & g_{22} & g_{32} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow g_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

↑ positiv  $\rightarrow$  Eindeutigkeit

$$g_{11} g_{21} = a_{12} \Rightarrow g_{21} = \frac{a_{12}}{g_{11}}$$

$$g_{11} g_{31} = a_{13} \Rightarrow g_{31} = \frac{a_{13}}{g_{11}}$$

↓

### Algorithmus

$$\text{for } i = 1:n$$

$$g_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{→ 1 Wurzel} \\ \text{→ (i-1) Mult.} \\ \text{→ (i-1) Add.} \end{array} \right\} \text{Aufwand } i$$

$$\sum_{i=1}^n 1 + 2(i-1)$$

$$+ \sum_{i=i+1}^n 1 + 2(i-1)$$

$$= \sum_{i=1}^n (2i-1)(n+1-i) =$$

$\downarrow \downarrow \downarrow$

$$\text{for } j = i+1:n$$

$$g_{ji} = \frac{1}{g_{ii}} (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik} g_{jk})$$

end

end

$$\left. \begin{array}{l} \text{→ 1 Division} \\ \text{→ (i-1) Mult.} \\ \text{→ (i-1) Sub.} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$$

### Eigenschaften symm. Matrizen:

(1) alle EW von A sind reell

(2) A ist orthogonal diagonalisierbar und es gibt eine ONB aus EV

$$(3) \|A\|_2 = \sigma(A)$$

(4) A pos. def.  $\Leftrightarrow$  alle EW von A  $> 0$

(a)

$$\Leftrightarrow \det A(1:k, 1:k) > 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{b})$$

### Beweis

1) Sei  $\lambda$  EW zum EV  $v$ :  $\langle Av, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|_2^2$

$$\langle v, Av \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|_2^2$$

$$\text{da } v \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$$

2) Satz von Schur:

$$\exists Q \text{ (orthogonal)} \quad Q^T A Q = R = \begin{bmatrix} \square & x & \cdots & x \\ 0 & \square & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \square \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow R^T = (Q^T A Q)^T = Q^T A Q \Rightarrow R^T = R \text{ symm. Block-Diagonal}$   
 da  $\lambda \in R \Rightarrow R \text{ diagonal}$

$$3) \|A\|_2 = \|Q^T D Q\|_2 = \|D\|_2 = \sqrt{\text{Sp}(D^T D)} = \sqrt{\text{Sp}(D^2)} = \text{Sp}(D) = \text{Sp}(A)$$

$$4) a) \Leftrightarrow " \text{Sei } v \text{ EV zu } \lambda : 0 < v^T A v = \langle Av, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|_2^2 \Rightarrow \lambda > 0 "$$

" $\Leftarrow$ "  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  bel.,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ONB aus EV,  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle Ax, x \rangle &= \langle A \sum_i x_i v_i, \sum_j x_j v_j \rangle = \sum_i \sum_j x_i x_j \langle Av_i, v_j \rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i x_i x_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i x_i x_j \delta_{ij} \\ &= \sum_i \lambda_i x_i^2 > 0 \end{aligned}$$

weil  $\lambda_i > 0$  und mind. ein  $x_i \neq 0$

b) aus Satz von Schur

• Bemerkung

$$\lambda_i > 0 \forall i \Rightarrow A \text{ pos. def.} \quad (A \neq A^T)$$

$$\text{Bsp. } [11] \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -8$$

//

Existenz der Cholesky-Zerlegung

für  $A$  symm. pos. def. existiert immer eine LR-Zerlegung ( $\det A(1:k, 1:k) > 0 \forall k = 1, \dots, n$ )

$$A = LR \Leftrightarrow A^T = R^T L^T$$

$$\text{Sei } D = \text{diag}(\lambda), \text{ so dass } R = D \cdot \tilde{R}, \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = L D \tilde{R} = L D \underbrace{\tilde{R}}_{\text{symm.}} \tilde{R}^T$$

$$\underbrace{\tilde{R}^{-1} L^{-1} A L^{-T} D^{-1}}_{\text{symm.}} = D^{-1} \underbrace{\tilde{R} L^{-T} D^{-1}}_{\text{symm.}} = I_n$$

$$\Rightarrow \tilde{R} L^{-T} = I$$

$$\Rightarrow \tilde{R} = L^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{und } A = \underbrace{L \cdot D^{1/2}}_{\text{symm.}} \underbrace{D^{1/2} L^T}_{\text{symm.}}$$

AUFGABE 1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A_1 \text{ pos. def.?}$$

$$\det A(1,1) = 4 > 0$$

$$\det A(1:2, 1:2) = 16 > 0$$

$$\det A = 120 + 12 + 12 - 20 - 24 - 24 = 76 > 0$$

JA ✓

$$A_1 = G_1 \cdot G_1^T = \begin{bmatrix} \square & 0 & 0 \\ 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ 0 & \square & \square \\ 0 & 0 & \square \end{bmatrix} \Rightarrow G_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

T(3)

$$b) A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow G_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

### Singularwertzerlegung (SWZ oder SVD)

Satz Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  gibt es orth. Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und eine Diagonalmatrix  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\min(m,n)}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , so dass

$$A = U \Sigma V^T$$

wobei  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$ .

### AUFGABE 2

sei  $A = U \Sigma V^T$  die SWZ von  $A$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \|U \Sigma V^T\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|U \Sigma V^T x\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x \neq 0} \frac{\|U \Sigma V^T x\|_2}{\underbrace{\|V^T x\|_2}_y} = \underline{\sigma_1}$$

Hinweis:

für jede orth. Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\|Qx\|_2^2 = x^T Q^T Q x = x^T x = \|x\|_2^2$$

und  $\|\Sigma\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|\Sigma x\|_2 = \|\Sigma e_1\|_2 = \|\sigma_1 e_1\|_2$

$$\Rightarrow \|A\|_F = \|U \Sigma V^T\|_F \stackrel{(*)}{=} \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2}$$

zu (\*)

$$\text{es gilt: } \|A_F\|^2 := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n (\|AA^T\|_{(i,i)}) = \underset{\substack{\uparrow \text{trace (Spur)}}}{\text{tr}} (AA^T)$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^m (\|A^TA\|_{(j,j)}) = \text{tr} (A^TA)$$

und

$$\|U^T A V\|_F^2 = \text{tr} (U^T A V (U^T A V)^T) = \text{tr} (U^T A \underbrace{V V^T}_{I} A U) = \text{tr} (U^T A (U^T A)^T) = \|U^T A\|_F^2$$

$$= \text{tr} ((U^T A)^T U^T A) = \text{tr} (A^T \underbrace{U U^T}_{I} A) = \underline{\|A\|_F^2}$$

Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist SWZ geg. durch

T (4)

$$A = U\Sigma V^T \quad \text{mit} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

$A$  invertierbar genau dann  $\Rightarrow |\det(A)| = |\det(U) \det(\Sigma) \det(V^T)| = |\det(\Sigma)| = \sigma_1 \cdots \sigma_n > 0$   
wenn  $\sigma_n > 0$

$$\Leftrightarrow \sigma_n > 0$$

$$A^{-1} = V \Sigma^{-1} U^T \quad \text{mit} \quad \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n \end{bmatrix}$$

Nach Umordnung von  $\Sigma^{-1}$  ergibt sich die SWZ von  $A^{-1}$  mit  
 $\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_n & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_1 \end{bmatrix}$  und  $\frac{1}{\sigma_n} \geq \dots \geq \frac{1}{\sigma_1} > 0 \Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = \underline{\underline{\frac{1}{\sigma_n}}}$

Damit ist  $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sigma_1 \cdot \frac{1}{\sigma_n} = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$

### AUFGABE 3

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nicht singulär  $\Rightarrow$  SWZ von  $A$ :  $A = U\Sigma V^T$ ,  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix}$

Wähle  $\hat{B} = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix} V^T$  d.h.  $\hat{B}$  ist singulär und

$$\|A - \hat{B}\|_2 = \|U \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix} V^T\|_2 \stackrel{\text{Aufg. 2}}{=} \sigma_n$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{\kappa_2(A)} = \frac{1}{\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2} = \frac{1}{\sigma_1 \cdot \frac{1}{\sigma_n}} = \frac{\sigma_n}{\sigma_1} = \frac{\|A - \hat{B}\|_2}{\|A\|_2}$$

~ In der Übung wurde bereits gezeigt, dass  $\inf_{B \text{ singulär}} \left\{ \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2} \right\} \geq \frac{1}{\kappa(A)}$   
 (nur zur Info - Studenten sollten den Begriff kennen)  
Beweis: (letzter Do große Übung)

Sei  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  bel. singuläre Matrix und  $x \neq 0$  mit  $Bx = 0$

$$\Rightarrow 0 < \|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax\| = \|A^{-1}\| \|Bx\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\kappa(A)} \leq \frac{\|A - B\|}{\|A\|_2} \quad \text{Da } B \text{ bel. folgt Behauptung}$$

## Berechnung der SWZ

(nur analytisch - nicht für Numerik)

T(5)

Es gilt:

$$A^T A = V \underbrace{\Sigma^T \Sigma}_{\Sigma^2 = I} V^T \quad \text{und} \quad A A^T = U \underbrace{\Sigma^T \Sigma}_I U^T$$

d.h. Singularwerte können mit Hilfe des EW von  $A^T A$  bzw  $A A^T$  berechnet werden  
(gleiche EW!)

$\Rightarrow \sigma_1, \dots, \sigma_r \neq 0$  so geordnet, dass  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  (nicht negativ)  
 $\Rightarrow \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

Berechnung des EV von  $A^T A$  und  $A A^T$  liefert die Matrizen  $U$  und  $V$   
falls  $V$  bekannt und  $\Sigma$  invertierbar

$$AV = U \Sigma \Leftrightarrow AV \Sigma^{-1} = U \quad \text{mit} \quad \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n} \end{bmatrix}$$

Allgemein für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $m \geq n$

- Berechne orth.  $V$  mit  $V^T A^T A V = I = \text{diag}(\lambda_i)$
- Setze  $\tilde{U} := AV(\sqrt{I})^{-1}$
- Ergänze  $\tilde{U}$  zu orth. Matrix  $U = [\tilde{U}, \tilde{U}]$
- Setze  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{I} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$   
 $\Rightarrow A = U \Sigma V^T$  ist SWZ

Falls  $\text{rang}(A) = r < n$ , dann heißt

$$A = \tilde{U} \Sigma \tilde{V}^T \quad \text{mit} \quad \tilde{U} \in \mathbb{R}^{m \times r}, \quad \tilde{V} \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad \Sigma_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

dünne SWZ, falls

- $\tilde{U}^T \tilde{U} = I_r$
- $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  mit  $\sigma_i > 0$
- $\tilde{V}^T \tilde{V} = I_r$

NR

## AUFGABE 4:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1^T A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{EW}$$

$$\begin{aligned} A_1 - \lambda V \\ [A_1 - 2I]V = 0 \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \quad V_3 = 1 \\ \lambda_1 = 2 \quad \lambda_{2,3} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{2}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad / \quad \text{rang}(A_1) = 1$$

$$\Rightarrow \text{dünne SWZ: } A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\Sigma_r} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{V_1^T \text{ EV zu } \lambda_1}$$

NR

$$\tilde{U} = A_1 \tilde{V}_1 \sqrt{\Sigma_r^{-1}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  volle SWZ

T(6)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: U_1 \Sigma_1 V_1^T$$

Orth. Ergänzung.  
z.B. mit Gram-Schmidt

b)  $A_2^T A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  mit EW  $\lambda_1 = 6$   $\lambda_2 = 1$   
und EV  $\tilde{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$   $\tilde{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \text{normalisiert } v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V_2^T A_2^T A_2 V_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =: D_2 \Rightarrow \tilde{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{setze } \tilde{U}_2 := A_2 V_2 \begin{bmatrix} \sqrt{14} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{14} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{dünne SWZ: } A_2 = \tilde{U}_2 \tilde{\Sigma}_2 \tilde{V}_2^T$$

$$\Rightarrow \text{volle SWZ: } A_2 = U_2 \Sigma_2 V_2^T \text{ mit}$$

$$U_2 = [\tilde{U}_2, \hat{U}_2]$$

$$\hat{U}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$