

Tutorium 5

Newtonverfahren und Fixpunktiteration

Newtonverfahren zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen

$$F(x) = 0 \quad F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{stetig diffbar}$$

$$DF(x) \text{ regulär } \forall x \in D$$

Taylorentwicklung: $F(x) = F(x^{(0)}) + DF(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + \text{T.h.O.}$

$$0 = F(x) \approx F(x^{(0)}) + DF(x^{(0)})(x - x^{(0)}) \rightarrow \text{Auflösen nach } x$$

$$x = x^{(0)} - DF(x^{(0)})^{-1} F(x^{(0)})$$

$$\Rightarrow \text{Iterationsvorschrift: } x^{(k+1)} = x^{(k)} - DF(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}) \quad (\text{FP-Iteration})$$

bzw. Löse das Gleichungssystem (linear)

$$DF(x^{(k)}) \delta^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta^{(k)} \quad (\text{z. B. durch LR-Zerlegung})$$

VORTEIL: Konvergenz mind. superlinear bzw. (lokal) quadratisch

$$\begin{aligned} & \text{lineare Konvergenz} \\ & \|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\| \\ & \text{superlineare Konvergenz} \\ & \|x_{k+1} - x^*\| \leq C_k \|x_k - x^*\| \\ & C_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Problem beim Newton Verfahren

- Konvergenz nur gesichert für $x_0 \in U(x^*)$ (d.h. in der Nähe von x^*)

→ um geeigneten Startwert zu finden ggf. größere Verfahren mit langsamerer Konvergenz

VORAUSSETZUNG: F in C^1 , DF^{-1} existiert

Numerische Mathematik I

5. Übungsblatt: Fixpunktiteration, Newton-Verfahren

Tutorium

Aufgabe 1:

Für welche der folgenden Gleichungen und welche Startwerte konvergiert die zugehörige Fixpunktiteration?

1. $x = e^x - \sin x + x$
2. $x = \sin x - e^x + x$
3. $x = \arcsin e^x, x < 0$
4. $x = \ln \sin x, x \in (0, \pi)$

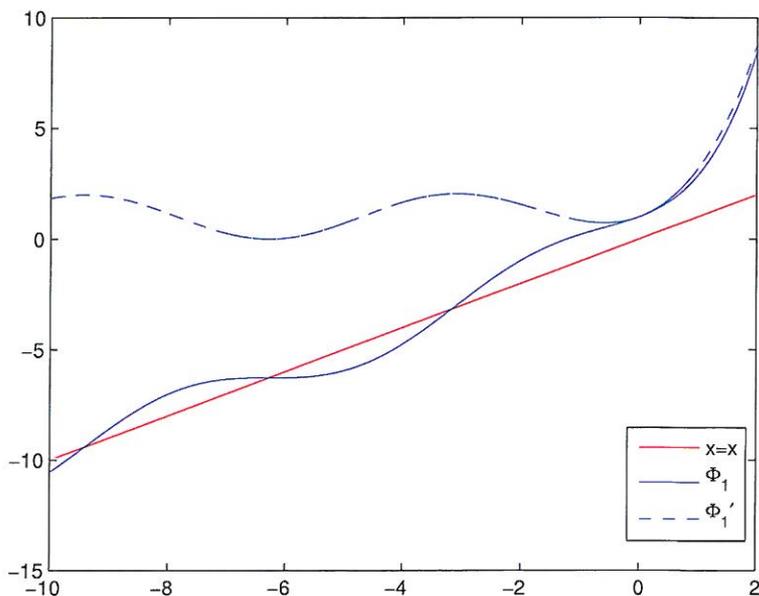
Lösungsvorschlag: Wir verwenden folgende Abschätzung

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq \|D\Phi\|_{\infty|_K} \|x - y\|_\infty, \forall x, y \in K.$$

dabei ist Φ eine auf einer konvexen offenen Menge K differenzierbare Funktion. Dort wo $|\Phi'(x)|$ gleichmäßig kleiner 1 ist, konvergiert das zugehörige Iterationsverfahren.

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= e^x - \sin x + x &\implies \Phi_1'(x) &= e^x - \cos x + 1 \\ \Phi_2(x) &= \sin x - e^x + x &\implies \Phi_2'(x) &= \cos x - e^x + 1 \\ \Phi_3(x) &= \arcsin e^x &\implies \Phi_3'(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \\ \Phi_4(x) &= \ln \sin x &\implies \Phi_4'(x) &= \cot x \end{aligned}$$

Die ersten beiden Funktionen haben unendlich viele Fixpunkte für $x < 0$. Für $x \geq 0$ liegen keine Fixpunkte vor. Seien $z_1 > z_2 > \dots$ diese Fixpunkte. Wir betrachten den Graphen von Φ_1, Φ_1' .



Für $x \geq 0$ ist bereits $\Phi_1'(x) = e^x - \cos x + 1 \geq 1$.

Wir bezeichnen die Nullstellen von $e^x - \cos x$ mit $w_0 > w_1 > w_2 > \dots$. Somit haben wir (siehe Grafiken)

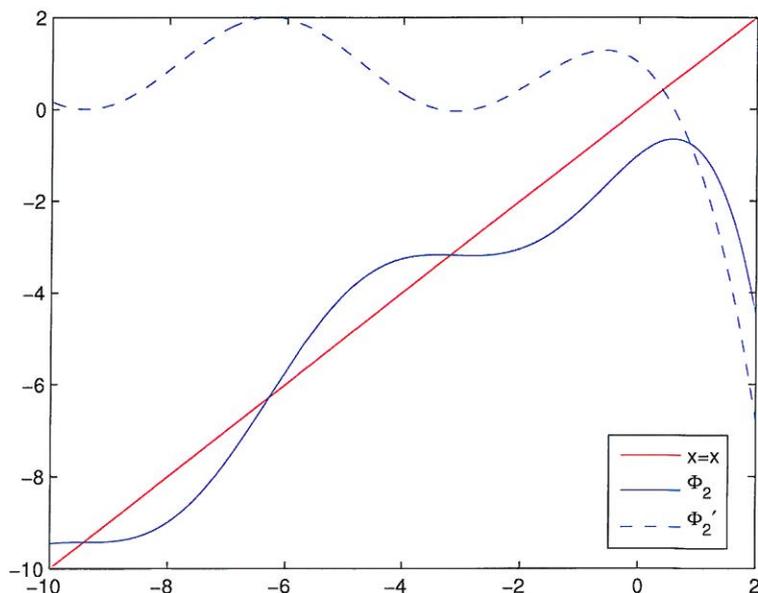
$$w_0 > w_1 > z_1 > w_2 > z_2 > w_3 > z_3 > \dots$$

Es ist klar nach dem Satz von Rolle, daß Nullstellen von $e^x - \cos x$ zwischen denen von $e^x - \sin x$ liegen müssen, weil $e^x - \cos x$ die Ableitung von $e^x - \sin x$ ist. Lediglich w_0, w_1 liegen rechts von z_1 .

$\Phi_1'(x) > -1$ für alle $x < 0$. Also brauchen wir nur die Stellen betrachten, an denen $\Phi_1'(x) = 1$ ist. Diese 1-Stellen von Φ_1' sind aber genau w_k . Bis zur ersten 1-Stelle w_0 ist Φ_1' immer ≥ 1 . Außerdem hat $e^x - \cos x$ in der Umgebung einer Nullstelle immer einen Vorzeichenwechsel. Also bekommen wir folgende Intervalle, in welchen $|\Phi_1'| < 1$ gilt: $(w_{2k+1}, w_{2k}), k = 0, 1, 2, \dots$. Innerhalb dieser Intervalle liegt der Fixpunkt $z_{2k}, k > 0$. Innerhalb der Intervalle (w_{2k}, w_{2k-1}) liegt der Fixpunkt $z_{2k-1}, k > 0$. Hier ist aber $|\Phi_1'| > 1$.

Folgerung: Das Fixpunktverfahren Φ_1 konvergiert innerhalb des Intervalls (w_{2k+1}, w_{2k}) gegen einen Fixpunkt $z_{2k}, k > 0$. Innerhalb des Intervalls (w_{2k}, w_{2k-1}) kann man keine Konvergenz gegen den Fixpunkt $z_{2k-1}, k > 0$ erwarten. Stattdessen aber werden die Iterierten wohl in das links bzw. rechts benachbarte Intervall (w_{2k+1}, w_{2k}) (w_{2k-1}, w_{2k-2}) wandern. Im Falle eines Startwertes rechts von z_1 ist sogar Divergenz zu erwarten. Somit sind $z_{2k}, k > 0$ anziehende und $z_{2k-1}, k > 0$ abstoßende Fixpunkte.

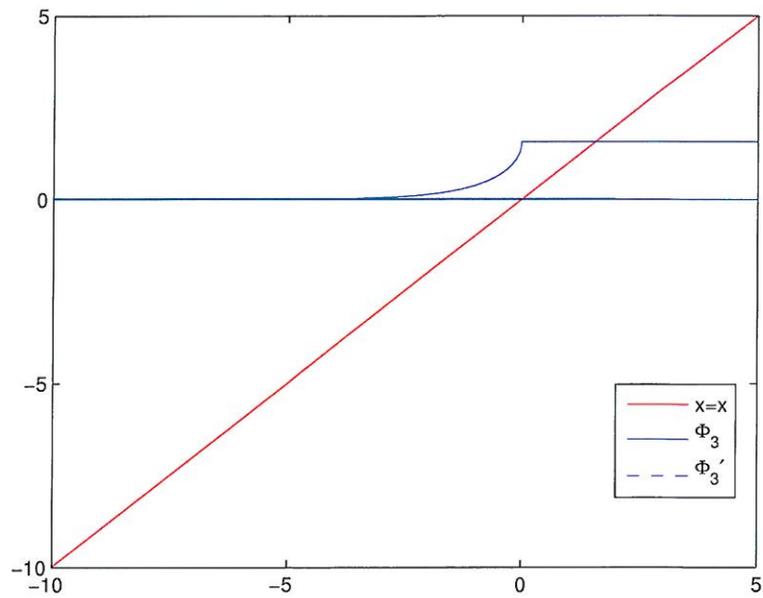
Für Φ_2 kann man völlig analog verfahren.



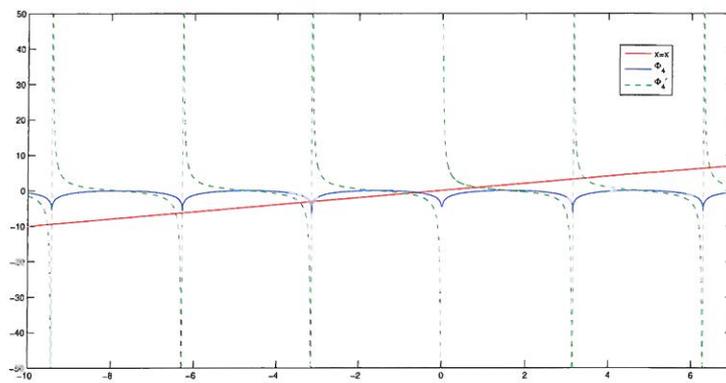
Hier vertauschen sich gegenüber Φ_1 die Intervalle.

Folgerung: Das Fixpunktverfahren Φ_2 konvergiert innerhalb des Intervalls (w_{2k}, w_{2k-1}) gegen einen Fixpunkt z_{2k-1} . Innerhalb des Intervalls (w_{2k+1}, w_{2k}) kann man keine Konvergenz gegen den Fixpunkt z_{2k} erwarten sondern eine Wanderung in die benachbarten Intervalle. Somit sind $z_{2k-1}, k > 0$ anziehende und $z_{2k}, k > 0$ abstoßende Fixpunkte. D.h. gegenüber Φ_1 sind anziehende und abstoßende Fixpunkte vertauscht.

Bei Φ_3 brauchen wir gar nicht erst die Ableitung zu betrachten, da diese Funktion keinen reellen Fixpunkt für $x < 0$ besitzt. Es ist nämlich $x = \arcsin e^x, x < 0 \iff \ln y = \arcsin y, 0 < y < 1$. Für $0 < y < 1$ ist der Logarithmus immer negativ, der Arcussinus immer positiv. Dieses bezieht sich natürlich auf eine rein reelle Rechnung ohne Verwendung komplexer Zahlen.



Eine entsprechende Argumentation kann man für Φ_4 machen. Es ist nämlich $x = \ln(\sin x), 0 < x < \pi \iff x = \ln y, 0 < y = \sin x \leq 1, 0 < x < \pi \iff x = \ln y, -\infty < \ln y = \ln(\sin x) \leq 0, 0 < x < \pi$. Also liegen auch hier keine Fixpunkte.



Aufgabe 2

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \frac{10x_1}{x_1+0,1} + 2x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{10x_1}{x_1+0,1} + 2x_2^2 \end{bmatrix} \quad \mathbb{D}f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{(x_1+0,1)^2} & 4x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbb{D}f(x_1, x_2)) = 4x_2 \neq 0 \quad \text{für } x_2 \neq 0$$

a) Newton Verfahren: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - [\mathbb{D}f(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)}) =: \phi(x^{(k)})$

mit $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{100}{4} & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

b) Das Newton-Verfahren konvergiert in keiner Umgebung von $\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ für alle Startvektoren, denn die Jacobimatrix

$$\mathbb{D}f(\varepsilon, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{(\varepsilon+0,1)^2} & 0 \end{bmatrix} \text{ ist singular}$$

Das Newton Verfahren konvergiert in

$$V = U_{1/10}(0) \setminus \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

denn $\forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in V$ gilt $\phi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}$

mit $\omega = \frac{x_2}{2} - \frac{5x_1}{2x_2(x_1+0,1)^2} \neq 0$

$$\phi^k\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega/2^{k+1} \end{bmatrix} \quad \phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{(x_1+0,1)^2} & 1/4x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{10x_1}{x_1+0,1} + 2x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{(k)} = \phi(x^{(k-1)}) = \phi^2(x^{(k-2)}) = \dots = \phi^k(x_0) \rightarrow 0$$

$$x^{(k)} = \frac{1}{2} x^{(k-1)}$$

lineare Konvergenz

Aufgabe 3

Sei $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x^* \in \mathbb{R}$ einfache NST von f d.h. $f(x^*) = 0$ aber $f'(x^*) \neq 0$

z.z: die Folge $x_{k+1} = \gamma - f'(x_k)^{-1} f(\gamma)$

mit $\gamma = x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k)$ konvergiert mit

Ordnung ≥ 3 gegen x^*

Zeige $|x_{k+1} - x^*| \leq C |x_k - x^*|^3$

Beweis: $|x_{k+1} - x^*| = |\phi(x_k) - x^*|$

$$\text{(Taylor)} = \left| \underbrace{\phi(x^*)}_{=x^*} + \phi'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{1}{2} \phi''(x^*)(x_k - x^*)^2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{3} \phi'''(x^*)(x_k - x^*)^3 + \dots - x^* \right|$$

$$= \left| \phi'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{1}{2} \phi''(x^*)(x_k - x^*)^2 + \frac{1}{3} \phi'''(x^*)(x_k - x^*)^3 + \dots \right|$$

d.h. falls $\phi'(x^*) = \phi''(x^*) = 0$

$\Rightarrow |x_{k+1} - x^*| \leq C |x_k - x^*|^3$ d.h. mind.

Konvergenz der Ordnung 3

$$\phi'(x) = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)} \right)'$$

$$= \left(g(x) - \frac{f(g(x))}{f'(x)} \right)' \quad \text{mit}$$

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

mit

$$g(x^*) = x^*$$

$$= \left(g - \frac{f(g)}{f'} \right)' \quad \text{[Kurzschreibweise]}$$

$$g'(x^*) = 1 - \frac{(f'(x^*))^2 - f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2}$$

$$= g' - \frac{f'(g)g'f' - f(g)f''}{(f')^2}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \phi'(x_*) = \underbrace{g'(x_*)}_{=0} - \frac{0-0}{f'_{x_0}{}^2} = 0 //$$

$$\Rightarrow \phi''(x_*) = g'' - \frac{1}{(f')^4} \left[\underbrace{(f''g'^2f' + f'(g)g''f' + f'(g)g'f''}_{=0} - \underbrace{f'(g)g'f''}_{=0} - \underbrace{f(g)f''(f')^2}_{=0} \right] - \underbrace{(f'(g)g'f' - f(g)f'')}_{=0 \text{ bei } x^*} 2f'f''$$

$$\phi''(x_*) = g'' - \frac{1}{(f')^4} [f'(g) g'' f'] (f')^2 = 0$$

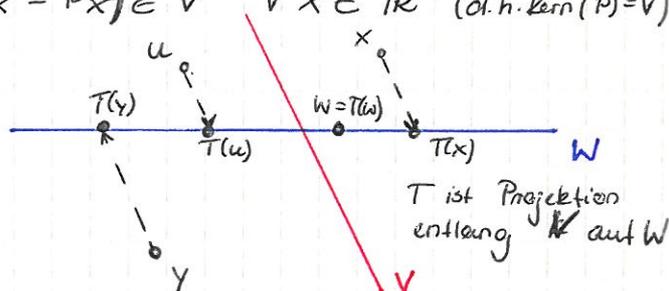
T-4

Theorie:

Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W, V \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilräume

P heißt Projektion auf W \Leftrightarrow $Pw = w \quad \forall w \in W$
 $Px \in W \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (d.h. $\text{Bild}(P) = W$)

P heißt Projektion entlang V \Leftrightarrow $Pv = 0 \quad \forall v \in V$
 $(x - Px) \in V \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (d.h. $\text{Kern}(P) = V$)



Aufgabe 4

$W, V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $W \oplus V = \mathbb{R}^n$, Seien $X = [x_1, \dots, x_n]$, $Z = [z_1, \dots, z_n]$
 mit $\{x_1, \dots, x_n\}$ Basis von W und $\{z_1, \dots, z_n\}$ Basis von V^\perp

2.2 a) $P := X(Z^T X)^{-1} Z^T$ ist Projektor auf W entlang V

Beweis: Projektor auf W :

Sei $w \in W$ d.h. $\exists \alpha$ mit $w = X\alpha$

$$\Rightarrow Pw = X \underbrace{(Z^T X)^{-1} Z^T X}_{=I} \alpha = X\alpha = w$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow Px = X \underbrace{[(Z^T X)^{-1} Z^T x]}_{= \beta} = X\beta \in W$$

Projektor entlang V :

Sei $v \in V$ d.h. $Z^T v = 0$ (Z Basis von V^\perp)

$$\Rightarrow Pv = X \underbrace{(Z^T X)^{-1} Z^T v}_{=0} = 0$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow x - Px = x - X(Z^T X)^{-1} Z^T x$$

$$Z^T(x - Px) = Z^T x - \underbrace{Z^T X (Z^T X)^{-1}}_{=I} Z^T x = 0$$

$$\Rightarrow x - Px \perp \text{span}(Z) = V^\perp \Rightarrow x - Px \in V //$$

b) z.z. P ist unabhängig von der Wahl der Basen
Seien \tilde{x}, \tilde{z} andere Basen von W und V^\perp

Dann gibt es R, S invertierbar mit $X = \tilde{X}R$, $Z = \tilde{Z}S$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(Z^T X)^{-1} Z^T &= \tilde{X}R(S^T \tilde{Z}^T \tilde{X}R)^{-1} S^T \tilde{Z}^T \\ &= \tilde{X} \underbrace{R R^{-1}}_I (\tilde{Z}^T \tilde{X})^{-1} \underbrace{S^{-T} S^T}_I \tilde{Z}^T \\ &= \tilde{X} (\tilde{Z}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{Z}^T // \end{aligned}$$

Aufgabe 5

z.z. Sei $W \subset \mathbb{R}^n$, Spalten von X_0 Orthonormalbasis von W .

Dann ist $P := X_0 X_0^T$ ein symmetrischer Orthogonalprojektor auf W (Projektor auf W entlang W^\perp)

Beweis

X_0 ONB von W und $(W^\perp)^\perp = W$ ($\cong X=Z$ in 4.)

$$\Rightarrow P = X_0 \underbrace{(X_0^T X_0)}_I^{-1} X_0^T = X_0 X_0^T //$$

Aufgabe 6

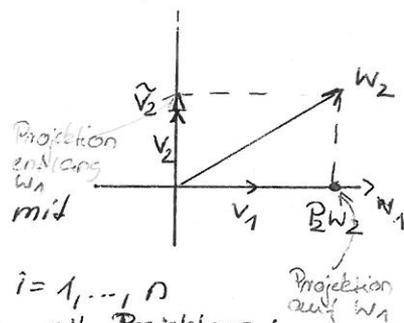
Gram-Schmidt-Verfahren mit Projektoren

geg.: l.u. Vektoren $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^n$

ges.: Orthonormale Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$

$$\text{span}\{w_1, \dots, w_i\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_i\} \quad i=1, \dots, m$$

als Algorithmus mit Projektoren:



$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$$

Normalisieren w_1

$$v_2' = w_2 - \langle v_1, w_2 \rangle \cdot v_1$$

orthogonalisieren w_2

$$v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$$

Normalisieren v_2'

$$v_i' = w_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_k, w_i \rangle \cdot v_k$$

$i=1, \dots, m$

$$v_i = \frac{v_i'}{\|v_i'\|}$$

Orthogonalisieren gegen alle Vorgänger

Normalisieren v_i'

for $i=1, \dots, m$

$$X_i := [v_1, \dots, v_{i-1}] \rightarrow \text{ONB von } \text{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$$

$$P_i := X_i X_i^T \rightarrow \text{symmetrischer Orthogonalprojektor auf } \text{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$$

$$Q_i := I - P_i \rightarrow \text{Projektor entlang } \text{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$$

$$\tilde{v}_i := Q_i w_i$$

$$v_i := \tilde{v}_i / \|\tilde{v}_i\|$$

end