**Technische Universität Berlin** **Wintersemester 2013/2014**
**Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften**
**Institut für Mathematik**
Günter Bärwolff, Ute Kandler

# Numerische Mathematik I

## 1. Übungsblatt: Rechnerarithmetik und Rundungsfehler

**Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 4. November 2013)**

**Aufgabe 1:** **(10 Punkte)**
Es gelte $x \oplus y = (x+y)(1+\epsilon)$ mit $|\epsilon| \leq k \cdot \text{eps} =: \epsilon^*$ für alle Maschinenzahlen $x$ und $y$. Seien nun Maschinenzahlen $x_1, \ldots, x_n$ gegeben und sei durch

$$\tilde{s}_1 = x_1, \quad \tilde{s}_k = \tilde{s}_{k-1} \oplus x_k$$

ein Algorithmus zur Berechnung der Summe $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$, $k \leq n$ definiert.

(a) Zeigen Sie: zerlegt man $\tilde{s}_k = s_k + f_k$, so gilt

$$|f_n| \leq [(1+\epsilon^*)^n - 1] \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Diskutieren Sie den relativen Fehler von $\tilde{s}_n$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\tilde{s}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i(1+\delta_i) \quad \text{mit} \quad (1-\epsilon^*)^n - 1 \leq \delta_i \leq (1+\epsilon^*)^n - 1$$

und falls $n\epsilon^* < 1$ gilt:

$$|\delta_i| \leq \frac{n\epsilon^*}{1-n\epsilon^*}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

**Aufgabe 2:** **(3 Punkte)**
Man betrachte die folgende Tabelle mit jeweils mathematisch äquivalenten Ausdrücken unter a) und b)

| | a) | b) | |
|---|---|---|---|
| 1.) | $(1+x)^2 - 1$ | $x^2 + 2x$ | $\lvert x\rvert \approx eps$ |
| 2.) | $\frac{e^x - 1}{x}$ | $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}$ | $0 < x \leq eps$ |

Bei welchen Ausdrücken tritt Auslöschung auf? Unterziehen sie sämtliche Ausdrücke einer Fehleranalyse.

**Aufgabe 3:** **(5 Punkte)**
Zu lösen sei die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2px - q = 0 \quad \text{für} \quad p = 2,\ q = 0.0005$$

in vier- und fünfstelliger Gleitkommaarithmetik im Dezimalsystem. Dabei sollen die folgenden Algorithmen untersucht werden:

(i) $d = p^2 + q$, $x_1 = p + \sqrt{d}$, $x_2 = p - \sqrt{d}$, ($p - q$ Formel)

(ii) $d = p^2 + q$, $x_1 = p + \sqrt{d}$, $x_2 = -q/x_1$. (Vietascher Wurzelsatz)

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung und erklären Sie die unterschiedlichen Resultate.

**Aufgabe 4:** **(2 Punkte)**

Bei exakter Arithmetik gilt für das arithmetische Mittel $\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$ zweier reeller Zahlen $x_1$ und $x_2$ die Ungleichung

$$\min\{x_1, x_2\} \leq \bar{x} \leq \max\{x_1, x_2\}. \tag{1}$$

Für Gleitpunktzahlen und das gemäß $\bar{x} = rd(rd(x_1 + x_2)/2)$ berechnete Mittel gilt die Ungleichung (1) im Allgemeinen nicht.
Finde Gleitpunktzahlen $x_1, x_2 \in \mathcal{F}(10, 2, -3, 3)$ derart, dass (1) verletzt ist. Wie ist die Berechnungsvorschrift für das arithmetische Mittel zu modifizieren, damit die Ungleichung (1) auch für das berechnete Mittel gilt?

**Programmieraufgabe 1:** (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 6. November 2013)
Schreiben Sie Matlab-Programme

```
e=meps(),     m=minimum(),     m=maximum()
```

die das Maschienenepsilon `eps`, die kleinste darstellbare positive Zahl $x_{min}$ bzw. die grösste darstellbare Zahl $x_{max}$ berechnen. Dabei ist `eps` als die kleinste Zahl definiert für die $1 \oplus \texttt{eps} > 1$ gilt.
In den Programmen soll nur benutzt werden, dass intern eine Gleitkommadarstellung basierend auf dem Dualsystem verwendet wird. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit denen der entsprechenden MATLAB Funktionen (`eps,realmin,realmax`). Interpretieren Sie die Unterschiede.

**Übungsaufgabe für die Tutorien (28.10-1.11.2013):**

**Aufgabe 1:**
Transformiere die folgenden Dezimalzahlen in ihre Binär- bzw. Hexadezimaldarstellung (d.h. $b = 2, 16$)

a) $x = 12.125$

b) $x = 0.1$

**Aufgabe 2:**
Es beschreibe $g(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ eine Gerade mit eindeutiger Nullstelle $x_0$. Die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(a, b) = x_0$ gebe eine Methode an, welches aus den Koeffizienten $a$ und $b$ die Nullstelle berechnet. Berechnen Sie die relative und absolute Kondition des Problems.

**Aufgabe 3:**
Man berechne die absolute und relative Kondition der folgenden Probleme (jeweils für $x \geq 0$) beschrieben durch

a) $f(x) = x^2$ für kleine und große $x$,

b) $f(x) = \sqrt{x}$ für kleine und große $x$.

**Aufgabe 4:**
Bei welchem der folgenden (analytisch gleichen) Ausdrücken tritt Auslöschung auf?

a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

b) $\frac{1}{n(n+1)}$

Man unterziehe beide Ausdrücke einer Fehleranalyse.