Der Gauss-Jordan-Algorithmus

Idee: Systematische Elimination von Variablen mittels folgender Manipulationen:
Beobachtung: Folgende Operationen verändern nicht die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems:

1) Vertauschen von zwei Gleichungen;
2) Multiplizieren einer Gleichung mit $c \in K \setminus \{0\}$;
3) Addieren des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Beispiel:

$$\begin{array}{rrrrrl} & & \frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & +x_5 & =1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & & =1 \\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & =3 \end{array}$$

Vertauschen der Gleichungen I und II:

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & & =1 \\ & & \frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & +x_5 & =1 \\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & =3 \end{array}$$

Subtrahieren der Gleichung I von III:

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & & =1 \\ & & \frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & +x_5 & =1 \\ & & x_3 & +2x_4 & +x_5 & =2 \end{array}$$

Subtrahieren des Zweifachen der Gleichung II von III:

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & & =1 \\ & & \frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & +x_5 & =1 \\ & & & x_4 & -x_5 & =0 \end{array}$$

Wir können dieses System jetzt schon lösen. Wir können es allerdings vorher noch weiter vereinfachen:

Multiplikation der zweiten Gleichung mit 2:

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & & =1 \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & =2 \\ & & & x_4 & -x_5 & =0 \end{array}$$

Subtrahieren der Gleichung II von I:

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & & -2x_4 & -2x_5 & =-1 \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & =2 \\ & & & x_4 & -x_5 & =0 \end{array}$$

Addieren des Zweifachen von Gleichung III zu I und Subtrahieren von Gleichung III von II:

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & & & -4x_5 & =-1 \\ & & x_3 & & +3x_5 & =2 \\ & & & x_4 & -x_5 & =0 \end{array}$$

Das System lässt sich jetzt sehr leicht lösen.

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda \quad \text{(freier Parameter)} \\ x_5 &= \mu \quad \text{(freier Parameter)} \\ x_4 &= \mu \\ x_3 &= 2-3\mu \\ x_1 &= -1+2\lambda+4\mu \end{aligned}$$

Elementarmatrizen

$$P_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{I_{i-1}} & i & \phantom{I_{j-i-1}} & j & \phantom{I_{n-j}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{j-i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-j} \end{bmatrix} \end{array} \in K^{n,n}$$

für $n \geq 2$ und $1 \leq i < j \leq n$.

Beispiel: $P_{23} \in K^{4,4}$:

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wirkung (bei Multiplikation von links):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile von $A = [a_{ij}]$.

Elementarmatrizen

$$M_i(\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \phantom{I_{i-1}} & i & \phantom{I_{n-i}} \end{array} \\ i & \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-i} \end{bmatrix} \end{array} \in K^{n,n}$$

für $0 \leq i \leq n$ und $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

Beispiel: $M_1(\lambda) \in K^{4,4}$:

$$M_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wirkung (bei Multiplikation von links):

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

Multiplikation der i-ten Zeile von $A = [a_{ij}]$ mit λ.

Elementarmatrizen

$$G_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & I_{j-i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-j} \end{bmatrix} \end{array} \in K^{n,n}$$

für $n \geq 2$, $\lambda \neq 0$ und $i < j$. (Analog für $j < i$).

Beispiel: $G_{42} \in K^{4,4}$:

$$G_{42}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wirkung (bei Multiplikation von links):

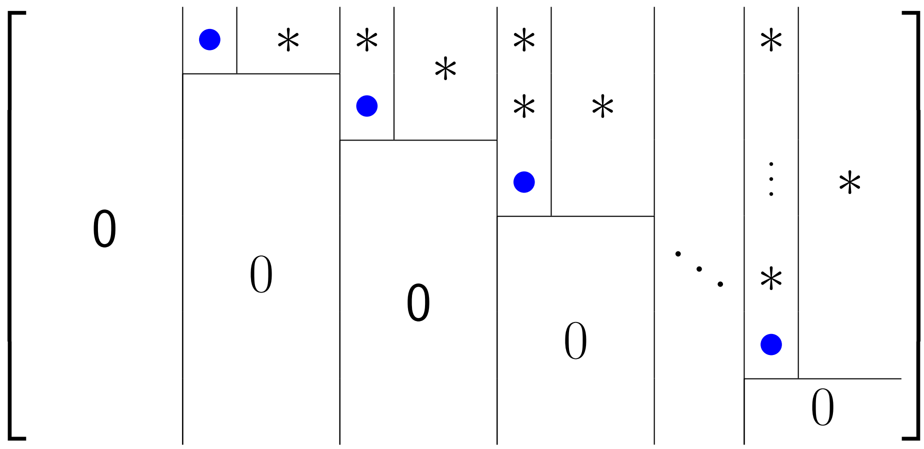
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} + \lambda a_{21} & a_{42} + \lambda a_{22} & a_{43} + \lambda a_{23} \end{bmatrix}$$

Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile von A.

Zeilenstufenform

$B \in K^{m,n}$ ist in Zeilenstufenform, falls B die folgende Form hat:



$\bullet$: von Null verschiedenes Element; $*$: beliebiges Element

Beispiele:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

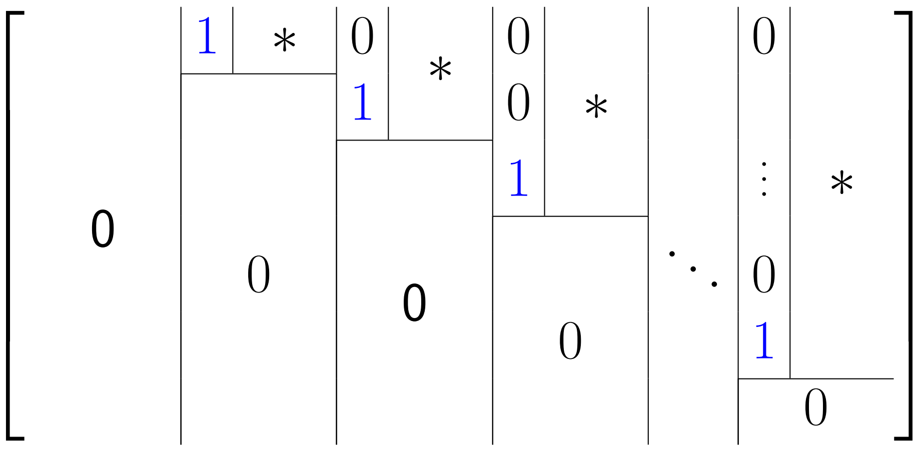
$$B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nicht jedoch:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Treppennormalform

$B \in K^{m,n}$ ist in Treppennormalform, falls B die folgende Form hat:



$*$: beliebiges Element

Beispiele:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nicht jedoch:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduktion auf Zeilenstufenform

am Beispiel $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Schritt 1: Suche das erste von Null verschiedene **Element** in der ersten von Null verschiedenen Spalte und tausche es in die erste Zeile:

$$\widetilde{A} = P_{12} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Schritt 2: Eliminiere alle Elemente unterhalb dieses **Pivotelements**:

$$\widehat{A} = G_{31}(-1) \cdot \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Schritt 3: Beginne für die **rote Matrix** erneut mit Schritt 1:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = G_{32}(-2) \cdot \widehat{A} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

FERTIG!

Reduktion auf Treppennormalform

am Beispiel $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Schritt 1: Normiere die **Pivotelemente**:

$$\widetilde{B} = M_2(2) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Schritt 2: Eliminiere nacheinander alle Elemente oberhalb der **Pivotelemente**:

$$\widehat{B} = G_{12}(-1) \cdot \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = G_{13}(2) \cdot G_{23}(-1) \cdot \widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

FERTIG!

Beobachtung: Die Spalten vor dem momentan betrachteten **Pivotelement** in Schritt 2 werden durch die Transformationen nicht mehr verändert.