Axiomatische Mathematik

Problem: Unbedachte Definitionen können zu Widersprüchen führen!

Definition: (Cantor) Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Russell'sche Antinomie:

$$\mathcal{M} := \{M | M \text{ ist eine Menge und } M \notin M\}$$

ist nach Cantor eine Menge. Die Frage "Gilt $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$?" führt zu einem Widerspruch!

Ausweg: **Axiomatisierung**

Hoyningen-Huene: In einer ersten Annäherung besteht die Axiomatisierung darin, dass man in die Menge der Aussagen, die in einem bestimmten Gebiet gelten, Ordnung bringt. Diese Ordnung besteht darin, dass man eine möglichst kleine Teilmenge aller dieser wahren Aussagen zu isolieren versucht, die die Eigenschaft hat, dass die anderen Aussagen aus ihnen logisch folgen; in dieser (kleinen) Teilmenge von Aussagen, den Axiomen, ist dann das ganze Wissen über das Gebiet repräsentiert.

Axiomatische Mathematik

Beispiel: **reelle Zahlen** $\mathbb{R}$ in der Analysis: der Begriff "reelle Zahlen" bleibt undefiniert, stattdessen wird $\mathbb{R}$ durch Axiome charakterisiert (siehe Analysis I):

- Körperaxiome
- Anordnungsaxiome
- Vollständigkeitsaxiom

Alle weiteren Sätze der Analysis werden daraus gefolgert.

Beispiel: **Mengenlehre**: der Begriff "Menge" und der Ausdruck "$m \in M$" bleiben undefiniert, stattdessen werden Mengen und $\in$ durch Axiome charakterisiert $\rightsquigarrow$ Mengenlehre nach Zermelo/Fraenkel; eine kleine Auswahl:

- zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben;
- es gibt eine leere Menge;
- sind M, N Mengen, so auch $M \cup N$ und $\{M, N\}$;
- ist M Menge, so auch die Potenzmenge $P(M)$;
- ist M Menge, so auch $\{x | x \in M$ und $A(x)\}$;
- weitere Axiome (z.B. Auswahlaxiom).

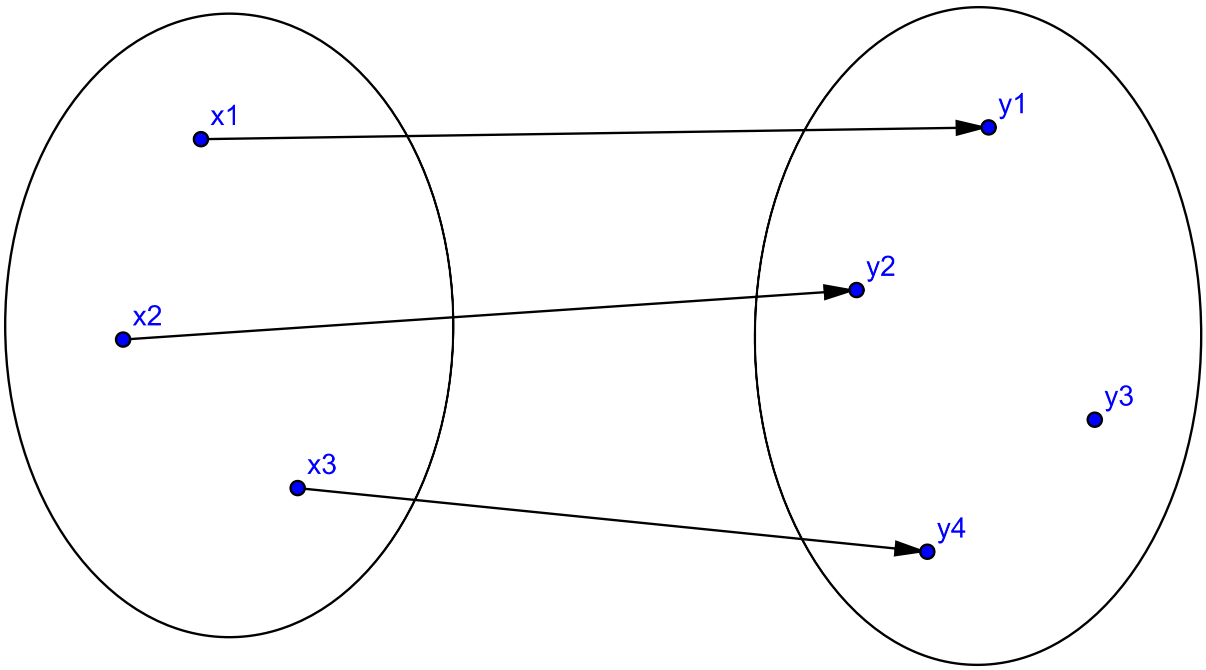
Axiomatische Mathematik

Alle weiteren Sätze der Mengenlehre werden aus diesen Axiomen gefordert.

Offenes Problem: Es ist bis heute unklar, ob die Mengenlehre und damit die gesamte darauf aufbauende Mathematik widerspruchsfrei ist.

Zur Beruhigung: Die Tatsache, dass seit Jahrzehnten kein Widerspruch gefunden wurde, deutet darauf hin, dass die Mengenlehre (und die gesamte Mathematik) widerspruchsfrei ist.

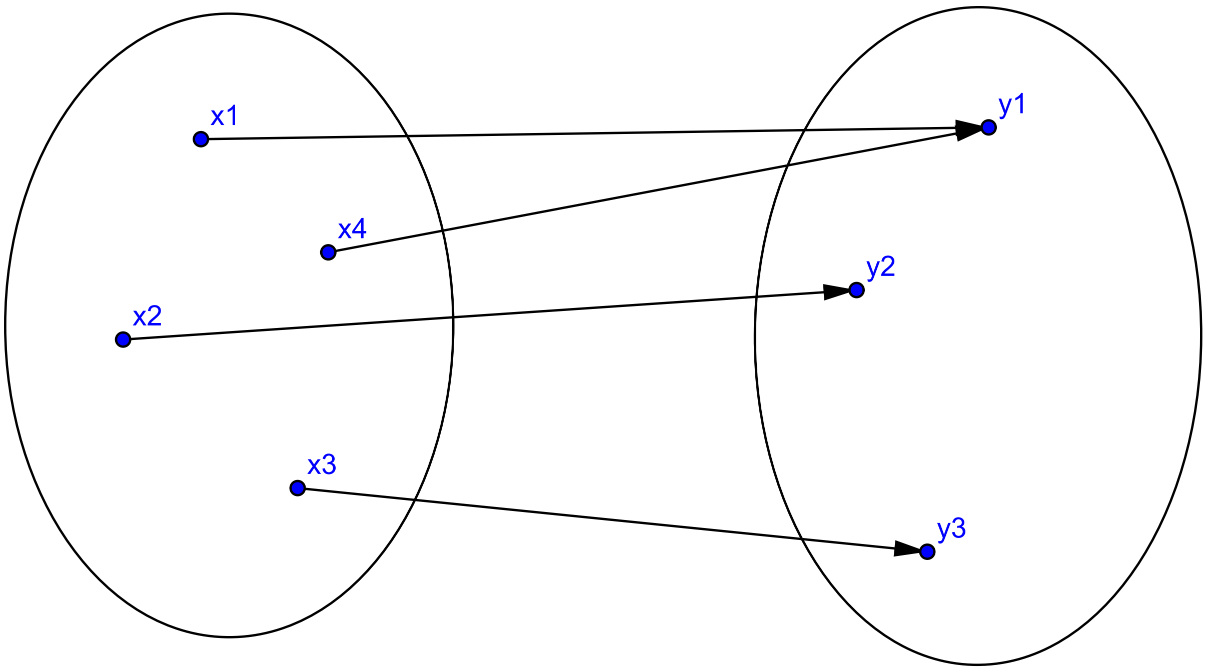
Injektiv, surjektiv, bijektiv



Die Abbildung ist **injektiv**, da jedes Element y_i höchstens ein Urbild hat.

Die Abbildung ist **nicht surjektiv**, da das Element y_3 kein Urbild hat.

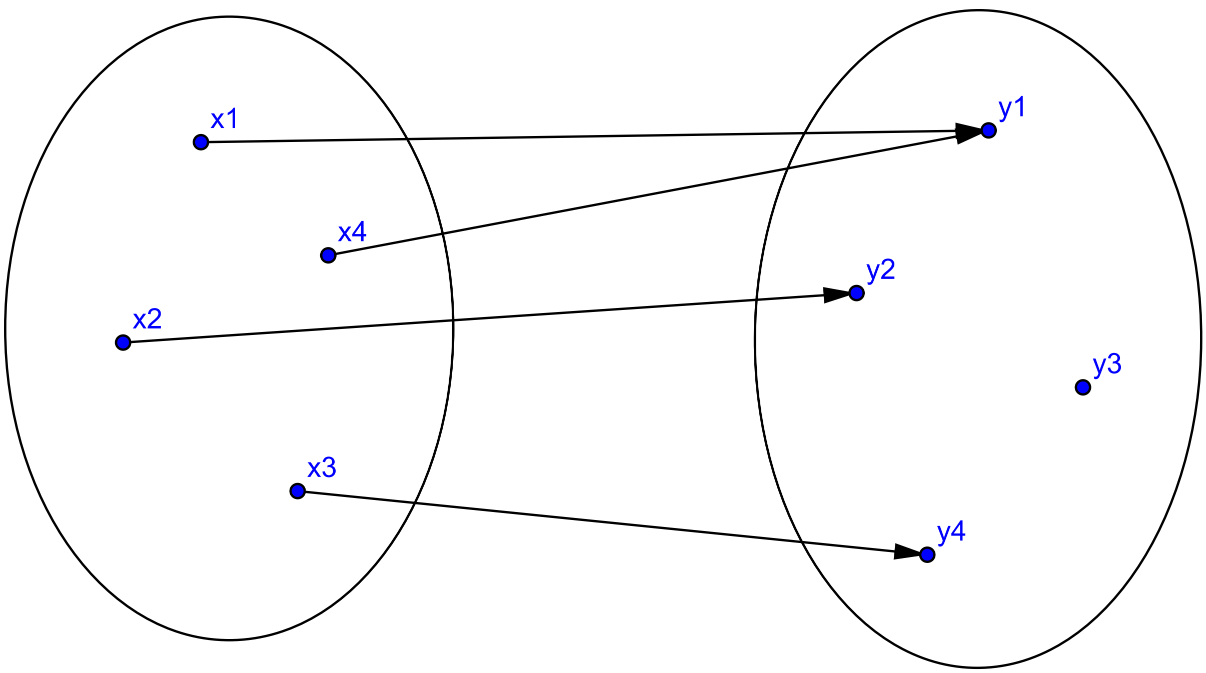
Injektiv, surjektiv, bijektiv



Die Abbildung ist **nicht injektiv**, da das Element y_1 zwei Urbilder hat, nämlich x_1 und x_4.

Die Abbildung ist **surjektiv**, da jedes Element y_i mindestens ein Urbild hat.

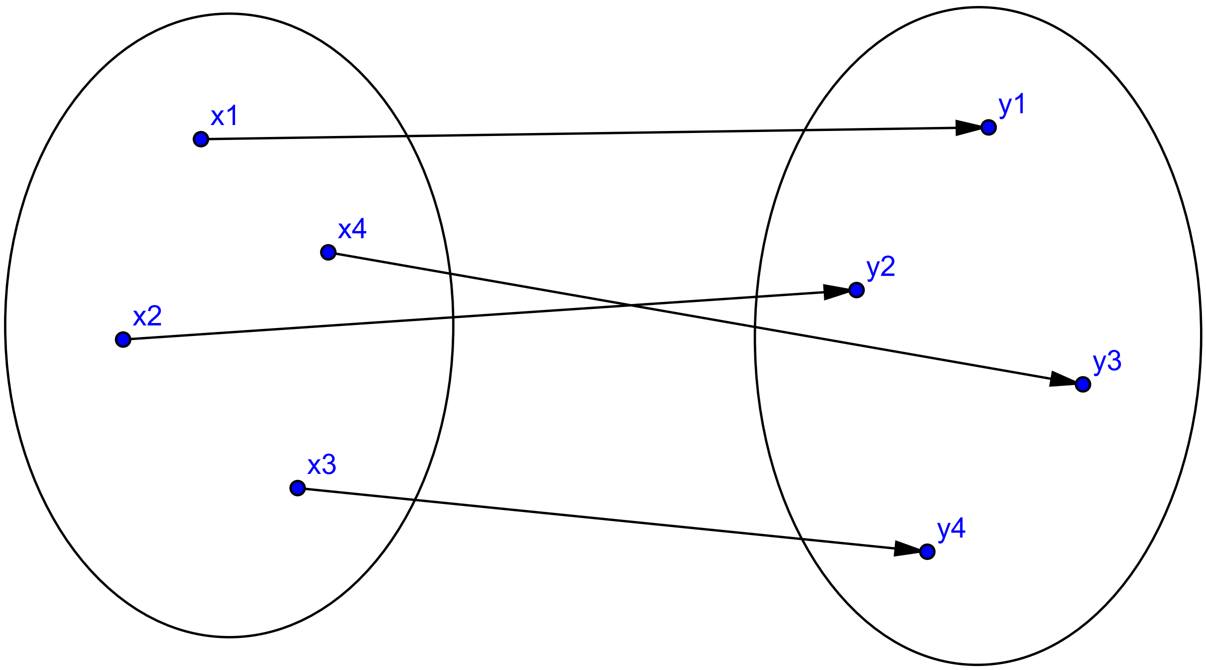
Injektiv, surjektiv, bijektiv



Die Abbildung ist **nicht injektiv**, da das Element y_1 zwei Urbilder hat, nämlich x_1 und x_4.

Die Abbildung ist **nicht surjektiv**, da das Element y_3 kein Urbild hat.

Injektiv, surjektiv, bijektiv



Die Abbildung ist **injektiv**, da jedes Element y_i höchstens ein Urbild hat.

Die Abbildung ist **surjektiv**, da jedes Element y_i mindestens ein Urbild hat.

Damit hat jedes Element y_i genau ein Urbild und die Abbildung ist **bijektiv**. Insbesondere hat die Abbildung eine **Umkehrabbildung**.

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Sei $\mathbb{R}_0^+ := \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$.

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist

- **nicht injektiv**, da z.B. $4 \in \mathbb{R}$ zwei Urbilder hat;
- **nicht surjektiv**, da z.B. $-1 \in \mathbb{R}$ kein Urbild hat.

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ f(x) = x^2$ ist

- **nicht injektiv**, da z.B. $4 \in \mathbb{R}$ zwei Urbilder hat;
- **surjektiv**, da jedes $y \in \mathbb{R}_0^+$ mindestens ein Urbild hat.

Die Abbildung $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist

- **injektiv**, da jedes $y \in \mathbb{R}$ höchstens ein Urbild hat;
- **nicht surjektiv**, da z.B. $-1 \in \mathbb{R}$ kein Urbild hat.

Die Abbildung $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ f(x) = x^2$ ist

- **injektiv**, da jedes $y \in \mathbb{R}_0^+$ höchstens ein Urbild hat;
- **surjektiv**, da jedes $y \in \mathbb{R}_0^+$ mindestens ein Urbild hat;
- **bijektiv**, da jedes $y \in \mathbb{R}_0^+$ genau ein Urbild hat.