# Algorithmus zur Berechnung der Jordannormalform

Olivier Sète

19. Januar 2011

## Inhaltsverzeichnis



## 1 Motivation

**Frage:** Wozu die Jordan-Normalform?

* Gesehen: Diagonalmatrizen sind gut, denn: Eigenwerte und Eigenvektoren können abgelesen werden, Matrixpotenzen $A^k$ lassen sich leicht berechnen, usw.
  Weiter gesehen: Diagonalisierbare Matrizen ebenfalls gut: $A = PDP^{-1}$, dann ist wieder $A^k = PD^kP^{-1}$ leicht zu berechnen.

* Es gilt: $A$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ es existiert eine Basis aus Eigenvektoren.
  **Problem:** nicht alle Matrizen/Endomorphismen sind diagonalisierbar! Dies ist der Fall, wenn es keine Basis aus Eigenvektoren gibt.

* **Ziel:** Finde eine Verallgemeinerung von Eigenvektoren, so dass zu $f \in \mathscr{L}(V, V)$ eine Basis $\mathcal{B}$ aus verallgemeinerten Eigenvektoren existiert bzgl. der $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ möglichst nahe an einer Diagonalmatrix ist. In Matrixsprache: Finde zu $A \in K^{n,n}$ einen Basiswechsel $P \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $J_A = P^{-1}AP$ möglichst nahe an einer Diagonalmatrix ist.

Die Jordan-Normalform ist „möglichst nahe an einer Diagonalmatrix“.

# 2 Algorithmus – Wie und warum funktioniert das?

## 2.1 Zutat 1 – Für einen Jordanblock

Wie muss die Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_s\} \subseteq V$ aussehen, bzw. wie muss $X = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_s \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_s(K)$ aussehen, so dass

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in K^{s,s} \quad \text{bzw.} \quad X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in K^{s,s}?$$

Im Matrixfall[1] gilt mit $X = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_s \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(K)$:

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = X \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= 1v_1 + \lambda v_2 \\ Av_3 &= 1v_2 + \lambda v_3 \\ &\vdots \\ \text{allgemein: } Av_j &= 1v_{j-1} + \lambda v_j \quad (j = 2, \ldots, s). \end{aligned}$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)v_1 &= 0 && (1) \\ (A - \lambda I)v_2 &= v_1 && (2) \\ (A - \lambda I)v_3 &= v_2 && (3) \\ &\vdots \\ \text{allgemein: } (A - \lambda I)v_j &= v_{j-1} \quad (j = 2, \ldots, s). && (4) \end{aligned}$$

Untersuchen wir dies etwas genauer.

**Beobachtung 2.1.** $*$ Für die Vektoren $v_1, \ldots, v_s$ gilt

$$\begin{aligned} & v_s \\ v_{s-1} &= (A - \lambda I)v_s \\ v_{s-2} &= (A - \lambda I)v_{s-1} = (A - \lambda I)^2 v_s \\ v_{s-3} &= (A - \lambda I)v_{s-2} = (A - \lambda I)^3 v_s \\ &\vdots \\ \text{allgemein: } v_{s-j} &= (A - \lambda I)^j v_s, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, s-1, \end{aligned}$$

[1]Für einen Endommorphismus geht es ganz genau so, ist aber etwas länger aufzuschreiben.

d.h. $v_s, v_{s-1}, \dots, v_1$ sind eine Folge wie bei den Krylov-Räumen[2]. Wir sagen, die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_s$ bilden eine *Jordankette*.

∗ Da $X$ invertierbar ist, sind insbesondere alle Spalten von Null verschieden. Formel (1) bedeutet daher, dass $v_1$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ ist. Formel (2) zeigt $(A - \lambda I)v_2 = v_1 \neq 0$, also $v_2 \notin \mathrm{Kern}(A - \lambda I)$. Es gilt jedoch

$$(A - \lambda I)^2 v_2 = (A - \lambda I)v_1 = 0,$$

also $v_2 \in \mathrm{Kern}((A - \lambda I)^2)$. Wegen $(A - \lambda I)^2 v_3 = v_1 \neq 0$ ist $v_3 \notin \mathrm{Kern}((A - \lambda I)^2)$, aber wegen

$$(A - \lambda I)^3 v_3 = (A - \lambda I)^2 v_2 = 0$$

ist $v_3 \in \mathrm{Kern}((A - \lambda I)^3)$. Allgemein ist

$$v_j \in \mathrm{Kern}((A - \lambda I)^j) \setminus \mathrm{Kern}((A - \lambda I)^{j-1}), \quad (j = 1, \dots, s).$$

Da Vektoren mit dieser Eigenschaft eine ausgezeichnete Rolle spielen, bekommen sie einen eigenen Namen.

**Definition 2.2.** Seien $V$ ein $K$-Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{L}(V, V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $f$. Dann heißt $v \in V$ ein *Hauptvektor $k$-ter Stufe zum Eigenwert $\lambda$ von $f$*, falls

$$v \in \mathrm{Kern}((f - \lambda\,\mathrm{id})^k) \setminus \mathrm{Kern}((f - \lambda\,\mathrm{id})^{k-1}).$$

Für Matrizen werden Hauptvektoren genauso definiert.

**Bemerkung 2.3.** Hauptvektoren 1-ter Stufe sind Eigenvektoren. Daher sind Hauptvektoren eine Verallgemeinerung von Eigenvektoren.

Wir fassen zusammen:

Für $X = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_s \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_s(K)$ gilt

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in K^{s,s}$$

genau dann, wenn $v_j$ ein Hauptvektor $j$-ter Stufe von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ ist ($j = 1, 2, \dots, s$) *und* die Vektoren $v_1, \dots, v_s$ eine Jordankette bilden:

$$\begin{aligned} &v_s \\ v_{s-1} &= (A - \lambda I)v_s \\ &\vdots \\ v_2 &= (A - \lambda I)v_3 \\ v_1 &= (A - \lambda I)v_2. \end{aligned}$$

Merke: Die Jordankette der Länge $s$ startet mit einem Hauptvektor der Stufe $s$.

[2] Vergleiche den Beweis der Jordan-Normalform.

## 2.2 Zutat 2 – Blöcke zählen

Wir haben gerade gesehen, dass wir, um einen Jordanblock der Größe $s$ zu erhalten, eine Jordankette der Länge $s$ aus Hauptvektoren benötigen. Um es kurz und prägnant (aber etwas weniger präzise) zu formulieren:

$$\boxed{\text{Pro Jordanblock eine Jordankette!}}$$

Zur Berechnung der Jordan-Normalform brauchen wir also die Anzahl und Länge der Jordanketten zu den verschiedenen Eigenwerten von $A$. Anzahl und Länge der Jordan-Ketten entsprechen dabei der Anzahl und Größe der Jordanblöcke. Diese können wir wie folgt berechnen: Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, so ist für $s = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} d_s(\lambda) &:= \operatorname{Rang}((A - \lambda I)^{s-1}) - \operatorname{Rang}((A - \lambda I)^s) \\ &= n - \dim(\operatorname{Kern}((A - \lambda I)^{s-1})) - (n - \dim(\operatorname{Kern}((A - \lambda I)^s))) \\ &= \dim(\operatorname{Kern}((A - \lambda I)^s)) - \dim(\operatorname{Kern}((A - \lambda I)^{s-1})) \\ &= \text{Anzahl der Jordanblöcke zum EW } \lambda \text{ der Größe } s \times s \text{ oder größer.} \end{aligned}$$

Wir merken uns:

$$\boxed{d_s(\lambda) = \text{Anzahl der Jordanblöcke zum EW } \lambda \text{ der Größe } s \times s \text{ oder größer.}}$$

Aus dieser Charakterisierung folgt insbesondere

$$d_s(\lambda) \geq d_{s+1}(\lambda) \geq 0, \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} &d_s(\lambda) - d_{s+1}(\lambda) \\ &= \text{Anzahl der Jordanblöcke zum EW } \lambda \text{ der Größe } s \times s \text{ oder größer} \\ &\quad - \text{Anzahl der Jordanblöcke zum EW } \lambda \text{ der Größe } (s+1) \times (s+1) \text{ oder größer} \\ &= \text{Anzahl der Jordanblöcke zum EW } \lambda \text{ der Größe genau } s \times s. \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.4.** Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, so existiert eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \{0\} = \operatorname{Kern}((A - \lambda I)^0) &\subsetneq \operatorname{Kern}((A - \lambda I)^1) \subsetneq \operatorname{Kern}((A - \lambda I)^2) \subsetneq \ldots \\ &\subsetneq \operatorname{Kern}((A - \lambda I)^m) = \operatorname{Kern}((A - \lambda I)^{m+1}) = \ldots, \end{aligned}$$

d.h. $m$ ist die kleinste Zahl, für die $\operatorname{Kern}((A - \lambda I)^m) = \operatorname{Kern}((A - \lambda I)^{m+1})$ gilt. Dann folgt

$$d_{m+1}(\lambda) = \dim(\operatorname{Kern}((A - \lambda I)^{m+1})) - \dim(\operatorname{Kern}((A - \lambda I)^m)) = 0,$$

d.h. es gibt keine Jordanblöcke der Größe $(m+1) \times (m+1)$ oder größer. Insbesondere gilt $d_s(\lambda) = 0$ für alle $s \geq m + 1$.

## 2.3 Algorithmus

Sei $A \in K^{n,n}$ gegeben und $P_A$ zerfalle in Linearfaktoren. (Ist $f \in \mathscr{L}(V,V)$ gegeben, geht das angegebene Verfahren analog, bzw. wendet man dies auf eine beliebige darstellende Matrix von $f$ an.)

(I) Bestimme die EW von $A$ als Nullstellen von $P_A = \det(tI - A)$.

(II) Für jeden Eigenwert $\lambda$ von $A$ führe folgendes Programm durch:

(i) Bestimme

$$\{0\} = \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^0) \subsetneq \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^1) \subsetneq \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^2) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^m) = \ldots$$

wobei $m$ die kleinste Zahl mit $\mathrm{Kern}((A-\lambda I)^m) = \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^{m+1})$ ist. Dies ist genau die kleinste Zahl $m$ für die $\dim(\mathrm{Kern}((A-\lambda I)^m)) = a(\lambda, A)$ gilt.

(ii) Für $s = 1, 2, \ldots, m$ bestimme die Zahlen

$$\begin{aligned} d_s := d_s(\lambda) &= \dim(\mathrm{Rang}((A-\lambda I)^{s-1})) - \dim(\mathrm{Rang}((A-\lambda I)^s)) \\ &= \dim(\mathrm{Kern}((A-\lambda I)^s)) - \dim(\mathrm{Kern}((A-\lambda I)^{s-1})) > 0 \end{aligned}$$

(Für $s \geq m+1$ ist $d_s(\lambda) = 0$, siehe Abschnitt 2.2.) Speziell ist

$$d_1(\lambda) = \dim(\mathrm{Kern}(A-\lambda I)) = g(\lambda, A)$$

die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda$.

(iii) Bestimmung der Jordanketten.

∗ Wegen $d_m - d_{m+1} = d_m$ gibt es genau $d_m$ viele Jordanblöcke der Größe $m \times m$. Für jeden Block bestimmen wir eine Jordankette aus Hauptvektoren: Wähle $d_m$-viele Hauptvektoren $m$-ter Stufe:

$$v_{1,m}, v_{2,m}, \ldots, v_{d_m,m} \in \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^m) \setminus \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^{m-1})$$

so, dass gilt: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_m} \in K$ mit $\sum_{i=1}^{d_m} \alpha_i v_{i,m} \in \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^{m-1})$, so folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{d_m} = 0$.

**Bemerkung 2.5.** Wegen $0 \in \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^{m-1})$ besagt diese zusätzliche Bedingung insbesondere, dass $v_{1,m}, \ldots, v_{d_m,m}$ linear unabhängig sind. Diese Bedingung wird später garantieren, dass wir eine Basis von $K^{n,1}$ (bzw. $V$) bekommen. Diese Bedingung ist wesentlich: Existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_m} \in K$ nicht alle Null mit $\sum_{j=1}^{d_m} \alpha_j v_{j,m} \in \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^{m-1})$, so folgt

$$0 = (A-\lambda I)^{m-1} \left( \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_{j,m} \right) = \sum_{j=1}^{d_m} \alpha_j (A-\lambda I)^{m-1} v_{j,m},$$

d.h. die Eigenvektoren $(A-\lambda I)^{m-1} v_{j,m}$ in den Jordanketten sind linear abhängig. Damit können wir keine Basis mehr erhalten.

**Zu den Indizes:** Der erste Index bei den $v_{i,j}$ steht für die Nummer der Kette, der zweite Index für die Stufe des Hauptvektors (hier also aus $\mathrm{Kern}((A-\lambda I)^j)$ aber nicht aus $\mathrm{Kern}((A-\lambda I)^{j-1})$).

* Für $j = m, m-1, \ldots, 2$ fahren wir wie folgend fort:

  Wir haben bisher $d_j$ Hauptvektoren $j$-ter Stufe $v_{1,j}, v_{2,j}, \ldots, v_{d_j,j}$ gefunden, die die folgende Bedingung erfüllen: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_j} \in K$ mit $\sum_{i=1}^{d_j} \alpha_i v_{i,j} \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-1})$, so folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{d_j} = 0$. Jeder dieser Vektoren wird mit $A - \lambda I$ multipliziert, also

  $$v_{i,j-1} := (A-\lambda I)v_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq d_j,$$

  womit wir Hauptvektoren $(j-1)$-ter Stufe erhalten. (Übungsaufgabe!).

  **Bemerkung 2.6.** Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_j} \in K$ mit $\sum_{i=1}^{d_j} \alpha_i v_{i,j-1} \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-2})$, so folgt

  $$0 = (A-\lambda I)^{j-2}\left(\sum_{i=1}^{d_j} \alpha_i v_{i,j-1}\right) = (A-\lambda I)^{j-1}\left(\sum_{i=1}^{d_j} \alpha_i v_{i,j}\right),$$

  also $\sum_{i=1}^{d_j} \alpha_i v_{i,j} \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-1})$, woraus $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{d_j} = 0$ folgt.

  Falls $d_{j-1} > d_j$ ist, so gibt es $d_j - d_{j-1}$ viele Jordanböcke der Größe $(j-1) \times (j-1)$. Für diese benötigen wir Jordanketten der Länge $j-1$. Daher ergänzen wir die so erhaltenen

  $$v_{1,j-1}, v_{2,j-1}, \ldots, v_{d_j,j-1} \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-1}) \setminus \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-2})$$

  zu $d_{j-1}$ vielen Hauptvektoren $(j-1)$-ter Stufe (falls $d_{j-1} > d_j$, sonst ist nichts zu tun)

  $$v_{1,j-1}, v_{2,j-1}, \ldots, v_{d_{j-1},j-1} \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-1}) \setminus \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-2})$$

  so, dass gilt: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d_{j-1}} \in K$ mit $\sum_{i=1}^{d_{j-1}} \alpha_i v_{i,j-1} \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-2})$, so folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{d_{j-1}} = 0$.

Nach dem Schritt für $j = 2$ haben wir $v_{1,1}, v_{2,1}, \ldots, v_{d_1,1} \in \operatorname{Kern}(A-\lambda I)$ gefunden. Wegen $\operatorname{Kern}((A-\lambda I)^0) = \{0\}$ sind diese Vektoren dank der Zusatzbedingung linear unabhängig. Da $\dim(\operatorname{Kern}(A-\lambda I)) = d_1$ ist, haben wir eine Basis von $\operatorname{Kern}(A-\lambda I)$ gefunden.

Wir haben damit $d_1$ verschiedene Jordanketten gefunden. Diese werden wie folgt als Matrix zusammengefasst:

$$X_\lambda := \left[v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,m}; v_{2,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{2,*}; \ldots; v_{d_1,1}, \ldots, v_{d_1,*}\right] \in K^{n,a(\lambda,A)}.$$

Jede Kette beginnen wir mit dem EV, dann kommt der HV 2-ter Stufe, dann der HV 3-ter Stufe, usw.

**Konvention:** In $X_\lambda$ schreiben wir zuerst die längste Kette, dann die zweitlängste Kette, usw.

(III) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ die verschiedenen EW von $A$ (Reihenfolge egal), dann ist

$$P = \begin{bmatrix} X_{\lambda_1} & \dots & X_{\lambda_l} \end{bmatrix} \in K^{n,n}$$

eine Übergangsmatrix, so dass

$$P^{-1}AP = J_A$$

in Jordannormalform ist.

Im ersten Diagonalblock der Größe $a(\lambda_1, A)$ stehen Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda_1$, deren Größen genau den Längen der Jordanketten entsprechen. Im zweiten Diagonalblock (der Größe $a(\lambda_2, A)$) stehen die Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda_2$, usw.

# 3 Algorithmus - Kochrezept

Sei $A \in K^{n,n}$ gegeben und $P_A$ zerfalle in Linearfaktoren. (Ist $f \in \mathscr{L}(V,V)$ gegeben, geht das angegebene Verfahren analog, bzw. wendet man dies auf eine beliebige darstellende Matrix von $f$ an.)

(I) Bestimme die EW von $A$ als Nullstellen von $P_A = \det(tI - A)$.

(II) Für jeden Eigenwert $\lambda$ von $A$ führe folgendes Programm durch:

(i) Bestimme

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^1) \subsetneq \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^2) \subsetneq \ldots \subsetneq \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^m) = \ldots$$

wobei $m$ die kleinste Zahl mit $\operatorname{Kern}((A-\lambda I)^m) = \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{m+1})$ ist. Dies ist genau die kleinste Zahl $m$ für die $\dim(\operatorname{Kern}((A-\lambda I)^m)) = a(\lambda, A)$ gilt.

(ii) Für $s = 1, 2, \ldots, m$ bestimme die Zahlen

$$d_s = d_s(\lambda) = \dim(\operatorname{Kern}((A-\lambda I)^s)) - \dim(\operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{s-1})) > 0.$$

(iii) Bestimmung der Jordanketten.

∗ Wähle $d_m$-viele Hauptvektoren $m$-ter Stufe:

$$v_{1,m}, v_{2,m}, \ldots, v_{d_m,m} \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^m) \setminus \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{m-1}),$$

so dass gilt: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d_m} \in K$ mit $\sum_{i=1}^{d_m} \lambda_i v_{i,m} \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{m-1})$, so folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{d_m} = 0$.

∗ Für $j = m, m-1, \ldots, 2$ fahren wir wie folgend fort:

Wir haben bisher $d_j$ Hauptvektoren $j$-ter Stufe $v_{1,j}, v_{2,j}, \ldots, v_{d_j,j}$ gefunden. Jeder dieser Vektoren wird mit $A - \lambda I$ multipliziert, also

$$v_{i,j-1} := (A-\lambda I) v_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq d_j.$$

Ergänze die so erhaltenen

$$v_{1,j-1}, v_{2,j-1}, \ldots, v_{d_j,j-1}$$

zu $d_{j-1}$ vielen Hauptvektoren $(j-1)$-ter Stufe (falls $d_{j-1} > d_j$, sonst ist nichts zu tun)

$$v_{1,j-1}, v_{2,j-1}, \ldots, v_{d_{j-1},j-1} \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-1}) \setminus \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-2})$$

so, dass gilt: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d_{j-1}} \in K$ mit $\sum_{i=1}^{d_{j-1}} \lambda_i v_{i,j-1} \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^{j-2})$, so folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{d_{j-1}} = 0$.

Wir haben damit $d_1$ verschiedene Jordanketten gefunden. Diese werden wie folgt als Matrix zusammengefasst:

$$X_\lambda := \left[v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,m}; v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,*}; \dots; v_{d_1,1}, \dots, v_{d_1,*}\right] \in K^{n,a(\lambda,A)}.$$

Jede Kette beginnen wir mit dem EV, dann kommt der HV 2-ter Stufe, dann der HV 3-ter Stufe, usw.

**Konvention:** In $X_\lambda$ schreiben wir zuerst die längste Kette, dann die zweitlängste Kette, usw.

(III) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ die verschiedenen Eigenwerte von $A$ (Reihenfolge egal), dann ist

$$P = \begin{bmatrix} X_{\lambda_1} & \dots & X_{\lambda_l} \end{bmatrix} \in K^{n,n}$$

eine Übergangsmatrix, so dass

$$P^{-1}AP = J_A$$

in Jordannormalform ist. Dabei entsteht zu jeder Jordankette ein Jordanblock passender Göße.

# 4 Beispiel

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5,5}$$

Bestimme die Jordannormalform $J_A$ von $A$ sowie eine Basiswechselmatrix $P$.

(I) Bestimme die EW von $A$:

$$P_A = \det(tI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} t-5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-4 \end{bmatrix}\right)$$

Laplace-Entwicklung nach der 5., 4, und 2. Zeile liefert

$$\begin{aligned} &= (t-4)(t-1)^2 \det\left(\begin{bmatrix} t-5 & -1 \\ 1 & t-3 \end{bmatrix}\right) = (t-4)(t-1)^2\Big((t-5)(t-3)+1\Big) \\ &= (t-4)(t-1)^2(t^2-8t+15+1) = (t-4)(t-1)^2(t^2-8t+16) \\ &= (t-4)^3(t-1)^2. \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit $a(1,A) = 2$ und $\lambda_2 = 4$ mit $a(4,A) = 3$.

(II) Für jeden Eigenwert $\lambda$ von $A$ führe folgendes Programm durch:

(i) Für $\lambda_1 = 1$:

$$\mathrm{Kern}(A - I) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\{e_2, e_4\}$$

und da $\dim(\mathrm{Kern}(A - I)) = 2 = a(1,A)$, können wir schon aufhören.

Für $\lambda_2 = 4$:

$$\mathrm{Kern}(A - 4I) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\{e_1 - e_3, e_5\},$$

$$\mathrm{Kern}((A - 4I)^2) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\{e_1, e_3, e_5\}.$$

Nun sind wir wegen $\dim(\text{Kern}((A-4I)^2)) = 3 = a(4, A)$ fertig.

(ii) Für $\lambda_1 = 1$ ist $d_1(1) = \dim(\text{Kern}(A - I)) = 2$.
Für $\lambda_2 = 4$ ist $d_1(4) = \dim(\text{Kern}(A-4I)) = 2$ und $d_2(4) = \dim(\text{Kern}((A-4I)^2)) - \dim(\text{Kern}(A-4I)) = 3 - 2 = 1$.

(iii) Bestimmung der Jordanketten.

∗ Für $\lambda_1 = 1$ ist $m = 1$. Wähle als Hauptvektoren 1-ter Stufe $v_{1,1} = e_2, v_{2,1} = e_4$. Diese bilden eine Basis von $\text{Kern}(A - I)$. Somit gilt: Sind $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ mit $\alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_4 = 0$, so sind $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Für $\lambda_2 = 4$ ist $m = 2$. Es sind

$$\begin{aligned}\text{Kern}((A-\lambda I)^2) &= \text{Span}\{e_1, e_3, e_5\},\\ \text{Kern}((A-\lambda I)^1) &= \text{Span}\{e_1 - e_3, e_5\}.\end{aligned}$$

Wegen $d_2(4) = 1$ wählen wir einen Hauptvektor 2-ter Stufe, z.B. $v_{1,2} = e_1$. Für diesen gilt: Ist $\alpha_1 \in K$ mit $\alpha_1 e_1 \in \text{Span}\{e_1 - e_3, e_5\}$, so folgt $\alpha_1 = 0$.

∗ Für $\lambda_1 = 1$ sind wir fertig. Für $\lambda_2 = 4$ berechnen wir

$$v_{1,1} := (A - 4I)v_{1,2} = e_1 - e_3.$$

Nun ist $d_1(4) = 2 > 1 = d_2(4)$, also müssen wir zu $v_{1,1}$ einen weiteren Hauptvektor 1-ter Stufe hinzufügen. Wir wählen $v_{2,1} = e_5$. Da beide Vektoren linear unabhängig sind, gilt: Sind $\alpha_1 v_{1,1} + \alpha_2 v_{2,1} \in \text{Kern}((A-4I)^0) = \{0\}$, so folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Nun fassen wir die gefundenen Vektoren zusammen:

$$X_1 = X_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} v_{1,1}, v_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; X_4 = X_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(III) Für die Basiswechselmatrix ist zum Beispiel möglich

$$P = \begin{bmatrix} X_1 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann folgt

$$P^{-1}AP = J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

□

# 5 Zweites Beispiel - Die unverzichtbare Zusatzbedingung

Dieses Beispiel soll verdeutlichen, was schiefgehen kann, wenn man bei der Wahl der Hauptvektoren nur auf lineare Unabhängigkeit achtet und nicht auf die zusätzliche Bedingung.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Betrachte

$$A := \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{4,4}.$$

Da $A$ eine obere Dreiecksmatrix ist, sind die Diagonaleinträge gerade die Eigenwerte, also ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ mit $a(\lambda, A) = 4$.

Dann ist

$$\mathrm{Kern}(A - \lambda I) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\{e_1, e_3\},$$

$$\mathrm{Kern}((A - \lambda I)^2) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}.$$

Wähle

$$v_{1,2} := e_1 + e_2 + e_4, \quad v_{2,2} := e_2 + e_4.$$

Es sind $v_{1,2}, v_{2,2} \in \mathrm{Kern}((A - \lambda I)^2) \setminus \mathrm{Kern}(A - \lambda I)$, und $v_{1,2}$ und $v_{2,2}$ sind linear unabhängig.

Nehmen wir nun $v_{1,2}, v_{2,2}$ und führen den Algorithmus weiter durch, bekommen wir durch Multiplikation der bisherigen Vektoren mit $A - \lambda I$

$$v_{1,1} := (A - \lambda I)v_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{2,1} := (A - \lambda I)v_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daher ist $\{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}\}$ keine Basis von $\mathbb{K}^{4,1}$!

Woran liegt das? Es gilt:

$$\alpha_1 v_{1,2} + \alpha_2 v_{2,2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Kern}(A - \lambda I) = \mathrm{Span}\{e_1, e_3\}$$

ist für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ mit $\alpha_2 = -\alpha_1$ erfüllt. $\square$