Eine alternative Definition von Polynomen

Olivier Sète

7. Dezember 2010

In diesem Dokument soll eine alternative Definition von Polynomen vorgestellt werden. Diese unterscheidet sich von der Definition aus der Vorlesung, liefert jedoch die gleichen algebraischen Objekte. Dieses Dokument richtet sich an interessierte Studenten. Es ist wie folgend aufgebaut:

* Die ersten beiden Seiten stellen die **Idee** vor, mit nur wenigen Beweisen, die die wesentlichen Ideen enthalten.
* Im zweiten Abschnitt wird die Konstruktion komplett mit allen Beweisen durchgeführt.

1 Die Idee

Es sei K ein Körper und sei V die Menge der abbrechenden Folgen in K, d.h.

$$V := \{a = (a_j)_{j=0}^{\infty} \,|\, \forall\, j \in \mathbb{N}_0 : a_j \in K; \exists\, n \in \mathbb{N}_0 : \forall\, j > n : a_j = 0\}.$$

Es gilt $a = b$ genau dann, wenn $a_j = b_j$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt. Auf V erklären wir punktweise eine Addition und eine Skalarmultiplikation

$$a + b = (a_j + b_j)_{j=0}^{\infty}, \quad \lambda a = (\lambda a_j)_{j=0}^{\infty},$$

wodurch $V \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, K)$ zu einem K-Vektorraum wird.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Folgen

$$e_n := (\delta_{n,j})_{j=0}^{\infty} = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \in V$$

(die 1 steht an der Stelle $j = n$). Mit diesen gilt

$$V = \mathrm{Span}\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\} = \mathrm{Span}\{e_0, e_1, e_2, \dots\}.$$

Dies sieht man wie folgt: Sei $a \in V$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ so dass $a_j = 0$ für $j > n$ gilt. Daher ist

$$a = (a_j)_{j=0}^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j = \sum_{j=0}^{n} a_j e_j.$$

Weiter sind die e_n, $n \in \mathbb{N}_0$, auch linear unabhängig und bilden somit eine Basis von V.

Definiere auf V eine Multiplikation

$$\cdot : V \times V \to V, \quad (a,b) \mapsto ab = \left(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell \right)_{j=0}^{\infty} = \left(\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} \right)_{j=0}^{\infty}.$$

Diese Multiplikation ist wohldefiniert, und V wird mit der Addition und dieser Multiplikation zu einem kommutativen Ring. (Übungsaufgabe).

Für jedes $a \in V$ gilt

$$ae_0 = e_0 a = \left(\sum_{i=0}^{j} \delta_{0,i} a_{j-i} \right)_{j=0}^{\infty} = (a_{j-0})_{j=0}^{\infty} = a,$$

d.h. e_0 ist das Einselement im Ring V bzgl. der Multiplikation.

Wir setzen nun $t := e_1$.

Lemma. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $t^n = e_n$.*

Beweis. Per Induktion:

I.A. t^0 ist per Definition das Einselement, also $t^0 = e_0$; $t^1 = e_1$ gilt per Definition von t.

I.V. Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ sei $t^n = e_n$ gezeigt.

I.S. Es gilt

$$t^{n+1} = tt^n = e_1 e_n = \left(\sum_{i=0}^{j} \delta_{1,i} \delta_{n,j-i} \right)_{j=0}^{\infty} = (\delta_{n+1,j})_{j=0}^{\infty} = e_{n+1},$$

denn für $j = 0$ ergibt die Summe $0 = \delta_{n+1,0}$. Für $j > 0$ ist $\sum_{i=0}^{j} \delta_{1,i} \delta_{n,j-i} = \delta_{n,j-1} = \delta_{n+1,j}$.

Damit folgt die Behauptung. □

Nun gilt für jedes $a \in V$:

$$a = (a_j)_{j=0}^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$$

da nach Voraussetzung für $a \in V$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $a_j = 0$ für $j > n$.

Wir sehen:

$$V = K[t]$$

ist der Ring der Polynome in der Unbekannten t mit Koeffizienten in K. (Man überzeuge sich noch einmal, dass die Multiplikation tatsächlich die übliche Multiplikation von Polynomen von früher bzw. „aus der Schule“ ist.)

2 Ausführlich

Es sei K ein Körper und sei V die Menge der abbrechenden Folgen in K, d.h.

$$V := \{a = (a_j)_{j=0}^\infty \,|\, \forall\, j \in \mathbb{N}_0 : a_j \in K; \exists\, n \in \mathbb{N}_0 : \forall\, j > n : a_j = 0\}.$$

Es gilt $a = b$ genau dann, wenn $a_j = b_j$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt. Auf V erklären wir punktweise eine Addition und eine Skalarmultiplikation

$$a + b = (a_j + b_j)_{j=0}^\infty, \quad \lambda a = (\lambda a_j)_{j=0}^\infty,$$

wodurch $V \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, K)$ zu einem K-Vektorraum wird. Wir halten dies als Satz fest.

Satz. $(V, +, \cdot)$ *ist ein* K*-Vektorraum. Insbesondere ist* $(V, +)$ *eine abelsche Gruppe.*

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Folgen

$$e_n := (\delta_{n,j})_{j=0}^\infty = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \in V$$

(die 1 steht an der Stelle $j = n$).

Satz. *Die Menge* $B = \{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *ist eine* K*-Basis von* V*.*

Beweis. Offenbar ist jedes e_n eine abbrechende Folge in K, also $e_n \in V$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Wir zeigen zuerst die lineare Unabhängigkeit von B. Dazu ist zu zeigen, dass je endlich viele der e_n, $n \in \mathbb{N}_0$, linear unabhängig sind. Seien daher Indizes $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n} \in K$ mit

$$(0)_{j=0}^\infty = 0_V = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} e_{i_k}.$$

Die Folge rechts besitzt an der Stelle $j = i_k$ $(k = 1, \dots, n)$ den Eintrag λ_{i_k}, daher gilt $\lambda_{i_k} = 0$.
Wir zeigen nun, dass B ein Erzeugendensystem ist. Sei $a \in V$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ so dass $a_j = 0$ für $j > n$ gilt. Daher ist

$$a = (a_j)_{j=0}^\infty = \sum_{j=0}^\infty a_j e_j = \sum_{j=0}^n a_j e_j.$$

Damit ist gezeigt, dass B eine K-Basis ist. □

Definiere auf V eine (innere) Multiplikation durch

$$* : V \times V \to V, \quad (a, b) \mapsto a * b := \Big(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell \Big)_{j=0}^\infty = \Big(\sum_{i=0}^j a_i b_{j-i} \Big)_{j=0}^\infty.$$

Dies ist ein sogenanntes *Faltungsprodukt.*

Lemma. *Die Multiplikation* $*$ *auf* V *ist wohldefiniert.*

Beweis. Seien $a, b \in V$. Per Definition ist $a * b$ eine Folge. Zu a und b existieren $n(a), n(b) \in \mathbb{N}_0$ mit $a_j = 0$ für $j > n(a)$ und $b_j = 0$ für $j > n(b)$. Setze $N := n(a) + n(b) \in \mathbb{N}_0$. Für $j > N$ folgt

$$\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} = \sum_{i=0}^{n(a)} a_i b_{j-i} = 0$$

da $j - i > N - i = n(a) + n(b) - i \geq n(b)$. Also ist $a * b$ eine abbrechende Folge in K, d.h. $a * b \in V$. $\square$

Satz. *$(V, +, *)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins. Das Einselement ist e_0.*

Beweis. Nach dem ersten Satz ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe. Es verbleiben die Rechenregeln für die Multiplikation $*$ zu zeigen.

* Assoziativität von $*$: Seien $a, b, c \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= \Big(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell\Big)_{j=0}^{\infty} * c = \Big(\sum_{r+s=j}\Big(\sum_{k+\ell=r} a_k b_\ell\Big) c_s\Big)_{j=0}^{\infty} \\ &= \Big(\sum_{r+s=j}\sum_{k+\ell=r} a_k b_\ell c_s\Big)_{j=0}^{\infty} = \Big(\sum_{k+\ell+s=j} a_k b_\ell c_s\Big)_{j=0}^{\infty} \\ &= \Big(\sum_{k+r=j} a_k \sum_{\ell+s=r} b_\ell c_s\Big)_{j=0}^{\infty} = a * \Big(\sum_{\ell+s=j} b_\ell c_s\Big)_{j=0}^{\infty} = a * (b * c).\end{aligned}$$

* Kommutativität von $*$: Seien $a, b \in V$. Dann gilt

$$a * b = \Big(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell\Big)_{j=0}^{\infty} = \Big(\sum_{\ell+k=j} b_\ell a_k\Big)_{j=0}^{\infty} = b * a.$$

* Distributivgesetze: Seien $a, b, c \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(a + b) * c &= (a_j + b_j)_{j=0}^{\infty} * c = \Big(\sum_{i=0}^{j}(a_i + b_i) c_{j-i}\Big)_{j=0}^{\infty} \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{j} a_i c_{j-i} + \sum_{i=0}^{j} b_i c_{j-i}\Big)_{j=0}^{\infty} = \Big(\sum_{i=0}^{j} a_i c_{j-i}\Big)_{j=0}^{\infty} + \Big(\sum_{i=0}^{j} b_i c_{j-i}\Big)_{j=0}^{\infty} \\ &= (a * c) + (b * c)\end{aligned}$$

  und

$$a * (b + c) = (b + c) * a = (b * a) + (c * a) = (a * b) + (a * c).$$

Für jedes $a \in V$ gilt

$$a * e_0 = e_0 * a = \Big(\sum_{i=0}^{j} \delta_{0,i} a_{j-i}\Big)_{j=0}^{\infty} = (a_{j-0})_{j=0}^{\infty} = a,$$

d.h. e_0 ist das Einselement. $\square$

Wir setzen nun $t := e_1$.

Lemma. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $t^n = e_n$.*

Beweis. Per Induktion:

I.A. t^0 ist per Definition das Einselement, also $t^0 = e_0$; $t^1 = e_1$ gilt per Definition von t.

I.V. Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ sei $t^n = e_n$ gezeigt.

I.S. Es gilt

$$t^{n+1} = t * t^n = e_1 * e_n = \left(\sum_{i=0}^{j} \delta_{1,i} \delta_{n,j-i} \right)_{j=0}^{\infty} = (\delta_{n+1,j})_{j=0}^{\infty} = e_{n+1},$$

denn für $j = 0$ ergibt die Summe $0 = \delta_{n+1,0}$. Für $j > 0$ ist $\sum_{i=0}^{j} \delta_{1,i} \delta_{n,j-i} = \delta_{n,j-1} = \delta_{n+1,j}$.

Damit folgt die Behauptung. □

Nun gilt für jedes $a \in V$:

$$a = (a_j)_{j=0}^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$$

da nach Voraussetzung für $a \in V$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert, mit $a_j = 0$ für $j > n$.

Wir sehen:

$$V = K[t]$$

ist der Ring der Polynome in der Unbekannten t mit Koeffizienten in K.
Man überzeugt sich leicht davon, dass die Multiplikation auf V genau die Multiplikation von Polynomen ist, wie man sie „aus der Schule“ kennt: Es ist

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \Big) \Big(\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell t^\ell \Big) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{m} a_k b_\ell t^{k+\ell} = \sum_{j=0}^{n+m} \Big(\sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell \Big) t^j,$$

und dies entspricht genau der Multiplikation $*$ in V.