Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète

WiSe 2010/2011
`http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Stand: 19. Oktober 2010

Lineare Algebra II
0. Hausaufgabe

Abgabe: 27.10.2010 **vor** der Vorlesung (freiwillig)

---

1. Aufgabe
Sei K ein Körper und sei $A \in K^{n,n}$. Weiter seien λ_1 und λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte von A, also $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2 linear unabhängig sind.

2. Aufgabe
Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$ und sei $A \in K^{n,n}$. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : K^{n,1} \to K, \quad x \mapsto x^T Ax.$$

Ist f linear? Zeigen Sie, dass $f = 0$ genau dann, wenn $A + A^T = 0$ ist.

3. Aufgabe
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ und seien $w_1, \dots, w_n$ Vektoren im K-Vektorraum W.

(i) Zeigen Sie, dass ein Homomorphismus $f \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $f(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$, existiert.

(ii) Zeigen Sie, dass dieser eindeutig bestimmt ist.

(iii) Geben Sie explizit $f(v)$ für $v \in V$ an.

4. Aufgabe
Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : V \to V, \quad \text{mit } v_j \mapsto \begin{cases} v_j + v_{j+1}, & j = 1, \dots, n-1 \\ v_1 + v_n, & j = n \end{cases}$$

die, wie in Aufgabe 3 gezeigt, eindeutig bestimmt ist.

(i) Berechnen die Matrixdarstellung von f bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$, also $[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}$.

(ii) Gegeben sei nun eine zweite Basis $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n\}$ mit $w_j = j v_{n+1-j}$, $j = 1, \dots, n$. Berechnen Sie die Basisübergangsmatrizen $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ und $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$, sowie die Matrixdarstellungen $[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ und $[f]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}$.

Gesamtpunktzahl: 0