Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète

WiSe 2010/2011
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/
Stand: 20. Oktober 2010

Lineare Algebra II
1. Hausaufgabe

Abgabe: 03.11.2010 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (5 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum mit der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Zeigen Sie, dass genau eine Basis $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ des Dualraums V^* mit

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

existiert. (Diese Basis nennen wir die zu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *duale Basis*.)

2. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{10, t-1, t^2 - t\}$ des 3-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Berechnen Sie die zu $\mathcal{B}$ duale Basis $\mathcal{B}^*$.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ eine Basis von V^*, so existiert genau eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V mit

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

4. Aufgabe (5 Punkte)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und seien $f, g \in V^*$ mit $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass $g = \lambda f$ für ein $\lambda \in K \backslash \{0\}$ gilt, genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(g)$ ist.
Kann auf die Voraussetzung $f \neq 0$ verzichtet werden?

Gesamtpunktzahl: 20