**Technische Universität Berlin** WiSe 2010/2011
**Institut für Mathematik** `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 28. Oktober 2010

# Lineare Algebra II
# 2. Hausaufgabe

Abgabe: 10.11.2010 **vor** der Vorlesung

---

**1. Aufgabe** (4 Punkte)

Seien $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum, $f_1, \dots, f_m \in V^*$ und $U := \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Kern}(f_i)$. Zeigen Sie, dass $\dim(U) \geq n - m$ ist.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Für einen Unterraum $U$ von $V$ sei

$$U^0 := \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \quad \forall\, u \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass $U^0$ ein Untervektorraum von $V^*$ ist, sowie dass für Teilräume $U_1, U_2$ von $V$ gilt:

(i) $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$.

(ii) $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_2^0 \subseteq U_1^0$.

**3. Aufgabe** (6 Punkte)

Seien $V, W$ zwei $K$-Vektorräume, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $V$, $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von $W$ und $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ bzw. $\{w_1^*, \dots, w_m^*\}$ die dualen Basen zu $\mathcal{B}_V$ bzw. $\mathcal{B}_W$. Für $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, setze

$$\varphi_{ij} : V \times W \to K, \quad \varphi_{ij}(v, w) := v_i^*(v) w_j^*(w), \quad v \in V, w \in W. \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{\varphi_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ eine Basis von

$$\mathcal{L}(V, W; K) := \{\beta : V \times W \to K \mid \beta \text{ bilinear}\}$$

ist. (Verwenden Sie **nicht** $\dim(\mathcal{L}(V, W; K)) = nm$).

(ii) Folgern Sie $\dim(\mathcal{L}(V, W; K)) = nm$ aus (i).

(iii) Seien $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ bzw. $\{w_1^*, \dots, w_m^*\}$ beliebige Basen von $V^*$ bzw. $W^*$. Definiere $\varphi_{ij}$ wie in (1). Gilt die Aussage aus (i) immer noch? Beweis oder Gegenbeispiel.

**4. Aufgabe** (6 Punkte)

Seien $V, W$ zwei $K$-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von $V$, $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ von $W$. Sei $\beta : V \times W \to K$ bilinear und $B$ die darstellende Matrix von $\beta$ bezüglich dieser Basen.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

  (i) $B$ ist nicht invertierbar.

  (ii) $\beta$ ist ausgeartet in der 2. Variablen.

  (iii) $\beta$ ist ausgeartet in der 1. Variablen.

(b) Folgern Sie aus (a): $\beta$ ist nicht ausgeartet genau dann, wenn $B$ invertierbar ist.

Gesamtpunktzahl: 20