Technische Universität Berlin WiSe 2010/2011
Institut für Mathematik `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 13. November 2010

Lineare Algebra II
4. Hausaufgabe

Abgabe: 24.11.2010 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (Wiederholung zur LA I) (5 Punkte)

(i) Untersuchen Sie jeweils **nur mit der Definition**, ob

(a) die Vektoren $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^{2,1}$ sind und ob diese ein Erzeugendensystem in $\mathbb{R}^{2,1}$ bilden;

(b) die Vektoren $f_1, \dots, f_n$ linear unabängig in $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{n,1}, \mathbb{R})$ sind und ob diese ein Erzeugendensystem von $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{n,1}, \mathbb{R})$ bilden. Dabei sei für $j = 1, 2, \dots, n$ die Abbildung $f_j : \mathbb{R}^{n,1} \to \mathbb{R}$ durch $x = \begin{bmatrix}x_1 & \dots & x_n\end{bmatrix}^T \mapsto f_j(x) = x_j$ gegeben.

(ii) Untersuchen Sie, ob $U := \{p \in \mathbb{C}[t] : p(1) = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}[t]$ ist.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(i) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ die dem Skalarprodukt zugeordnete Norm. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ die *Parallelogrammgleichung* erfüllt, d.h. dass

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

für alle $x, y \in V$ gilt.

(ii) Sei $n \geq 2$. Untersuchen Sie, für welche $p \geq 1$ die p-Norm auf $\mathbb{K}^{n,1}$ von einem Skalarprodukt induziert wird und für welche p dies nicht der Fall ist.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiter sei $U \subseteq V$ ein Unterraum.

(i) Zeigen Sie, dass $U^\perp$ ein Unterraum von V ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ gilt.

(iii) Sei $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $U = (U^\perp)^\perp$ gilt.

(iv) Sei V euklidisch mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\Phi : V \to V^*$, $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$, der Fréchet-Riesz-Isomorphismus (siehe HA 3-3). Zeigen Sie $\Phi(U^\perp) = U^0$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiter sei $f : V \to V$ eine Abbildung, für die $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in V$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{L}(V, V)$ ist.

Hinweis: Sie können $\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|$ untersuchen.

(ii) Sei nun V endlichdimensional. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(iii) Sei

$$V = \left\{ (a_0, a_1, a_2, \ldots) \subseteq \mathbb{K} : \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$$

und sei das Skalarprodukt durch

$$\langle (x_0, x_1, \ldots), (y_0, y_1, \ldots) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \bar{y}_k.$$

gegeben. (Sie brauchen weder zu zeigen, dass V ein $\mathbb{K}$-Vektoraum ist, noch dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wohldefiniert und ein Skalarprodukt ist.)

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : V \to V, \quad (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots),$$

den sogenannten *Rechtsshift-Operator*. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ die Gleichung $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ gilt, dass f jedoch nicht bijektiv ist.

Gesamtpunktzahl: 20