Technische Universität Berlin WiSe 2010/2011
Institut für Mathematik `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 26. November 2010

Lineare Algebra II
5. Hausaufgabe

Abgabe: 01.12.2010 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Wir bezeichnen mit $x = (x_1, x_2, \ldots) = (x_j)_{j=1}^{\infty}$, $x_j \in \mathbb{C}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, eine (unendliche) Folge komplexer Zahlen und mit $\bar{x} = (\bar{x}_j)_{j=1}^{\infty}$ deren komplex konjugierte Folge. Betrachten Sie den aus der Übung bekannten (unendlichdimensionalen) unitären Vektorraum

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \text{ mit } \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j.$$

(i) Sei $a \in \ell^2$. Definiere

$$M_a : \ell^2 \to \ell^2, \quad x \mapsto (a_j x_j)_{j=1}^{\infty}.$$

(a) Zeigen Sie, dass M_a wohldefiniert ist, also dass $M_a(x) \in \ell^2$ für $x \in \ell^2$ gilt, und dass $M_a \in \mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass M_a eine Adjungierte M_a^{ad} besitzt und bestimmen Sie diese.

(c) Bestimmen Sie alle $a \in \ell^2$ für die M_a selbstadjungiert ist.

(ii) Sei

$$F : \ell^2 \to \ell^2, \quad x \mapsto (x_j + x_{j+1})_{j=1}^{\infty}$$

Zeigen Sie, dass F eine Adjungierte besitzt und bestimmen Sie diese.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Seien V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Zeigen Sie, dass f genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\langle f(v), v \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$ gilt.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie:

(i) Ist V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, dann gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}\{f \in \mathcal{L}(V,V) \mid f = f^{\mathrm{ad}}\} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(ii) Ist V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum, dann gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}\{f \in \mathcal{L}(V,V) \mid f = f^{\mathrm{ad}}\} = n^2.$$

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und Φ der Fréchet-Riesz-Isomorphismus aus HA 03-3. Zeigen Sie, dass $f^{\mathrm{ad}} = \Phi^{-1} \circ f^* \circ \Phi$ für $f \in \mathcal{L}(V,V)$ gilt.

Bemerkung: Die gleiche Aussage gilt ebenfalls für unitäre Vektorräume, allerdings ist $\Phi : V \to V^*$, $v \mapsto \langle\cdot, v\rangle$, dann *semilinear* und bijektiv.

Zusatzaufgabe (5 Punkte)

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ zwei endlichdimensionale euklidische Vektorräume und sei $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Zeigen Sie, dass ein eindeutiges $g \in \mathcal{L}(W,V)$ mit

$$\langle f(v), w\rangle_W = \langle v, g(w)\rangle_V \qquad \forall\, v \in V, w \in W$$

existiert. Wir schreiben dann $f^{\mathrm{ad}} := g$ und nennen diese *die zu f adjungierte Abbildung*, oder kurz *die Adjungierte von f*.

Gesamtpunktzahl: 20