Technische Universität Berlin WiSe 2010/2011
Institut für Mathematik http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 29. November 2010

Lineare Algebra II
6. Hausaufgabe

Abgabe: 08.12.2010 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)
Ist V ein Vektorraum und $f \in \mathcal{L}(V, V)$, so heißt f *nilpotent*, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k-\text{mal}} = 0_{\mathcal{L}(V,V)}.$$

Sei nun V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f \in \mathcal{L}(V, V)$ selbstadjungiert und nilpotent. Zeigen Sie, dass $f = 0$ ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, $A \in K^{n,n}$, $B \in K^{m,m}$, $n \geq m$. Falls es eine Matrix $P \in K^{n,m}$ mit $\text{Rang}(P) = m$ gibt, so dass $AP = PB$ gilt, dann ist jeder Eigenwert von B ein Eigenwert von A.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$ und

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[t]_{\leq n} &\to \mathbb{R}[t]_{\leq n}, \\ p(t) &\mapsto p(t+1) - p(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f linear ist. Für welche n ist f diagonalisierbar, für welche n nicht?

4. Aufgabe (4 Punkte)
Seien V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $f = -f^{\text{ad}}$. Zeigen Sie, dass $f \neq 0$ genau dann gilt, wenn f nicht diagonalisierbar ist.

5. Aufgabe (4 Punkte)
Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ und

$$p(t) := \prod_{j=1}^{m} (t - \mu_j) = (t - \mu_1)(t - \mu_2) \cdot \ldots \cdot (t - \mu_m) \in K[t]_{\leq m}.$$

Zeigen Sie, dass $p(f)$ genau dann bijektiv ist, wenn $\lambda \notin \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ für alle Eigenwerte λ von f gilt.

Gesamtpunktzahl: 20