Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète

WiSe 2010/2011
`http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Stand: 8. Dezember 2010

Lineare Algebra II
7. Hausaufgabe

Abgabe: 15.12.2010 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

(i) Untersuchen Sie, welche der folgenden Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

diagonalisierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D, so dass $S^{-1}AS = D$ gilt ($A = A_1$ bzw. A_2).

(ii) Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Untersuchen Sie, welche der folgenden Endomorphismem $f \in \mathcal{L}(V, V)$ diagonalisierbar sind und welche nicht:

(a) $f(v_j) = v_j + v_{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$, und $f(v_n) = v_n$,

(b) $f(v_j) = jv_j + v_{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$, und $f(v_n) = nv_n$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Seien V ein unitärer Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Weiter sei $\mathcal{H}_n := \{g \in \mathcal{L}(V, V) \,|\, g = g^{\mathrm{ad}}\}$. Dann sind die Abbildungen

$$h_1 : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n, \quad g \mapsto \frac{1}{2}(f \circ g + g \circ f^{\mathrm{ad}}),$$
$$h_2 : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n, \quad g \mapsto \frac{1}{2i}(f \circ g - g \circ f^{\mathrm{ad}}),$$

wohldefiniert (d.h. es gilt $h_1(g), h_2(g) \in \mathcal{H}_n$) und erfüllen $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.

(ii) Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ gegeben und $\mathcal{S}_n := \{M \in \mathbb{C}^{n,n} \mid M^T = M\}$ der Vektorraum der komplex-symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Dann sind

$$h_1 : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n, \quad B \mapsto AB + BA^T, \quad h_2 : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n, \quad B \mapsto ABA^T,$$

wohldefiniert und erfüllen $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $p_1, p_2, p_3 \in K[t]$. Zeigen Sie die folgenden Teilbarkeitsaussagen:

(i) $p_1 | (p_1 p_2)$.

(ii) Aus $p_1 | p_2$ und $p_2 | p_3$ folgt $p_1 | p_3$.

(iii) Aus $p_1 | p_2$ und $p_1 | p_3$ folgt $p_1 | (p_2 + p_3)$.

(iv) Gilt $p_1 | p_2$ und $p_2 | p_1$, so existiert $c \in K \backslash \{0\}$ mit $p_1 = c p_2$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $p, s \in K[t]$ zwei Polynome. Sind p und s nicht beide Null, so heißt $d \in K[t]$ ein *größter gemeinsamer Teiler* (ggT) von p und s, kurz $d = \mathrm{ggT}(p, s)$, wenn gilt:

(i) $d | p$ und $d | s$ (d ist ein gemeinsamer Teiler),

(ii) Ist $d' \in K[t]$ mit $d' | p$ und $d' | s$, so folgt $d' | d$ (d ist der größte gemeinsame Teiler).

(Der ggT ist eindeutig bis auf Multiplikation mit von Null verschiedenen Konstanten. Durch Normierung wird er eindeutig.) Sind $p = s = 0$, so setzen wir $\mathrm{ggT}(0, 0) := 0$.

Sind $p, s \in K[t]$ mit $\mathrm{Grad}(p) \geq \mathrm{Grad}(s) \geq 0$, so wird $\mathrm{ggT}(p, s)$ berechnet durch den folgenden „Euklidischen Algorithmus“, der auf dem Satz über die Polynomdivision basiert:

$$\begin{aligned} p &= s q_1 + r_1 \\ s &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1}. \end{aligned}$$

Dann ist der letzte vom Nullpolynom verschiedene Rest r_n ein größter gemeinsamer Teiler von p und s. (Dies müssen Sie nicht beweisen.)

(i) Seien $p = t^4 - 8t^3 + 23t^2 - 28t + 12$ und $s = t^3 - 9t^2 + 26t - 24$. Bestimmen Sie mittels des obigen Algorithmus $\mathrm{ggT}(p, s)$.

(ii) Zeigen Sie: Zu $p, s \in K[t]$ existieren $\widetilde{p}, \widetilde{s} \in K[t]$ mit $p\widetilde{p} + s\widetilde{s} = \mathrm{ggT}(p, s)$.

Gesamtpunktzahl: 20