Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète

WiSe 2010/2011
`http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Stand: 14. Dezember 2010

Lineare Algebra II
8. Hausaufgabe

Abgabe: 05.01.2011 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Seien V ein unitärer Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f, g \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie, dass eine ONB $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ und $[g]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ beide obere Dreiecksmatrizen sind, d.h. f und g sind simultan triangulierbar.

(ii) Zeigen Sie, dass die Bedingung $f \circ g = g \circ f$ in (i) hinreichend aber nicht notwendig ist, d.h. finden Sie einen unitären Vektorraum V mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f, g \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $f \circ g \neq g \circ f$, so dass f und g simultan triangulierbar sind.

2. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten und $g \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie, dass f und g simultan diagonalisierbar sind.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = [a_{ij}] \in K^{n,n}$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$. Bestimmen Sie alle $B \in K^{n,n}$ mit $AB = BA$.

(iii) Seien $n \in \mathbb{N}$ und

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r I_{n_r} \end{bmatrix} \in K^{n,n}.$$

Dabei seien $\lambda_j \in K$, $j = 1, 2, \ldots, r$, paarweise verschieden und $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2 \ldots, r$, mit $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$. Bestimmen Sie alle $B \in K^{n,n}$ mit $AB = BA$.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$ eine Projektion, d.h. es gilt $f^2 = f$. Zeigen Sie:

(i) Für $v \in \operatorname{Bild}(f)$ gilt $f(v) = v$.

(ii) Es gilt $V = \operatorname{Bild}(f) \oplus \operatorname{Kern}(f)$.

(iii) Sei $k := \dim(\operatorname{Bild}(f))$. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_k & \\ & 0_{n-k} \end{bmatrix}$$

gilt. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom P_f von f und zeigen Sie, dass $\lambda \in \{0, 1\}$ für jeden Eigenwert λ von f gilt.

(iv) Die Abbildung $g := \mathrm{id}_V - f$ ist eine Projektion mit $\operatorname{Kern}(g) = \operatorname{Bild}(f)$ und $\operatorname{Bild}(g) = \operatorname{Kern}(f)$.

(v) Für jeweils zwei Unterräume $U, W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$ gibt es eine eindeutige Projektion $\tilde{f} \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $\operatorname{Bild}(\tilde{f}) = U$ und $\operatorname{Kern}(\tilde{f}) = W$.

Gesamtpunktzahl: 20