Technische Universität Berlin WiSe 2010/2011
Institut für Mathematik `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 13. Januar 2011

Lineare Algebra II
10. Hausaufgabe

Abgabe: 19.01.2011 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5,5}.$$

Bestimmen Sie dabei die Zahlen $d_s(\lambda) = \mathrm{Rang}((A - \lambda I)^{s-1}) - \mathrm{Rang}((A - \lambda I)^s)$ aus der Vorlesung zur Bestimmung der Größen der Jordanblöcke.

Hinweis: Es gilt $P_A = (t-1)^4(t-2)$. Dies müssen Sie nicht zeigen. Zur Probe: Es gilt

$$(A - I)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Aufgabe (2 Punkte)

Bestimmen Sie (bis auf die Reihenfolge der Blöcke) alle Matrizen J in Jordan-Normalform mit charakteristischem Polynom $P_J = (t+1)^4(t-3)^4$ und Minimalpolynom $m_J = (t+1)^2(t-3)^2$. Begründen Sie ihr Ergebnis.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n,n}$. Das charakteristische Polynom P_A von A zerfalle in Linearfaktoren. Das Minimalpolynom von A werde mit m_A bezeichnet. Zeigen Sie:

(i) Ist $n = 2$ oder $n = 3$, so ist die Jordan-Normalform J_A von A eindeutig durch P_A und m_A bestimmt.

Hinweis: Fallunterscheidung zur Anzahl paarweiser verschiedener Eigenwerte von A.

(ii) Für $n \geq 4$ ist die Jordan-Normalform J_A von A nicht eindeutig durch P_A und m_A bestimmt.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V,V)$. Das charakteristische Polynom P_f von f zerfalle in Linearfaktoren.

(i) Zeigen Sie: f ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom m_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

(ii) Sei $f \neq \mathrm{id}_V$ mit $f^3 = \mathrm{id}_V$. Überprüfen Sie, ob f diagonalisierbar ist, wenn

  (a) $K = \mathbb{R}$,

  (b) $K = \mathbb{C}$.

5. Aufgabe (6 Punkte)

Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V,V)$ ein Endomorphismus, der eine Jordan-Normalform besitzt. Es seien $\widetilde{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, k$, die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f. Für $j = 1, \ldots, k$ bezeichne $\widetilde{d}_j$ die Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert $\widetilde{\lambda}_j$.

Zeigen Sie, dass $M_f := \prod_{j=1}^{k} (t - \widetilde{\lambda}_j)^{\widetilde{d}_j}$ das monische Polynom kleinsten Grades mit $M_f(f) = 0$ ist, also dass $M_f = m_f$ gilt.

Tipp: Zeigen Sie die Behauptung erst für einen Jordanblock und anschließend für eine Matrix in Jordan-Normalform.

Gesamtpunktzahl: 20