Technische Universität Berlin WiSe 2010/2011
Institut für Mathematik `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 28. Januar 2011

Lineare Algebra II
12. Hausaufgabe

Abgabe: 02.02.2011 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Seien V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Zeigen Sie:

(i) Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V gilt $m_f = m_{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}}$.

(ii) $m_f = m_{f^{\mathrm{ad}}}$.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

(i) Berechnen Sie symmetrische Matrizen $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit $A = S_1 S_2$.

(ii) Berechnen Sie e^A.

(iii) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = Ay$$

mit dem Anfangswert $y(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ mit den Methoden aus der Vorlesung.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Für $A \in K^{n,n}$ definieren wir

$$\mathcal{C}(A) := \{M \in K^{n,n} \,|\, AM = MA\}.$$

Das charakteristische Polynom von A zerfalle in Linearfaktoren.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}(A)$ ein Unterraum von $K^{n,n}$ ist.

(ii) Sei $n = 2$. Zeigen Sie, dass $\dim(\mathcal{C}(A)) \in \{2, 4\}$ ist und geben Sie eine Basis von $\mathcal{C}(A)$ an.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Betrachten Sie die homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + a_1 z^{(1)} + a_0 z = 0, \tag{1}$$

wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $z^{(j)} = \frac{d^j z}{dt^j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, die wir als ein homogenes System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten schreiben können:

$$y' = Ay \quad \text{ mit } A = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}. \tag{2}$$

(i) Zeigen Sie, dass $g(\lambda, A) = 1$ für jeden Eigenwert λ von A gilt.

(ii) Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften der Lösungsmenge von (2), um zu zeigen: Die Lösungsmenge von (1) ist ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis

$$\begin{aligned} &\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{a(\lambda_1,A)-1}e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, \ldots, t^{a(\lambda_m,A)-1}e^{\lambda_m t}\} \\ &\qquad = \{t^j e^{\lambda_i t} \mid i = 1, \ldots, m, j = 0, 1, \ldots, a(\lambda_i, A) - 1\}. \end{aligned}$$

Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A.

Gesamtpunktzahl: 20